DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $x_0 \in (a,b)$, diem que:
$x \longrightarrow y=f(x)$

f és derivable en x_0 $\Leftrightarrow$ existeix $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

d'aquest límit, en diem la **derivada de f en x_0** i el representem per $f'(x_0)$ o $y'(x_0)$ o $(df/dx)(x_0)$.

Si anomenem **increment de x** = $\Delta x = x - x_0$ i **increment de y** = $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0\ x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

FUNCIÓ DERIVADA - DERIVADES SUCCESSIVES.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$, diem que:
f és derivable a l'interval (a,b) $\Leftrightarrow$ és derivable a tots els punts de l'interval.
Si una funció és derivable a l'interval (a,b), podem considerar una altra funció que assigna a cada x_0 el valor de la derivada de f en aquest x_0 d'aquesta funció en diem **funció derivada de f**

$f'\ (a,b) \longrightarrow R$
$x \longrightarrow$ derivada de f en x = $f'(x)$

Si f ' és derivable a l'interval (a,b), parlem de la derivada de f ' que en direm derivada segona o f ''.
I en general, definim la derivada n-èssima com la derivada de (n-1)-èssima derivada: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'$.

CONTINUÏTAT DE LES FUNCIONS DERIVABLES.

f derivable $\Rightarrow$ f contínua
$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 $\Rightarrow$ f contínua en x_0 .

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA.

La derivada d'una funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt.
$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ = pendent de la recta tangent en $(x_0, f(x_0))$.

TANGENTS I NORMALS A UNA CORBA.

Si $y=f(x)$ és una funció derivable en un punt x_0, la **tangent** en el punt d'abscissa x_0 és:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) .$$

la **normal** en x_0 és $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

CÀLCUL DE DERIVADES.

TAULA DE DERIVADES.

$y = k = ctt \Rightarrow \quad y' = 0$ $\qquad$ $y = f+g \Rightarrow \quad y' = f'+g'$

$y = k\,f \Rightarrow \quad y' = k\,f'$ $\qquad$ $y = f\,g \Rightarrow \quad y' = f'g + f\,g'$

$$y = \frac{f}{g} \Rightarrow \quad y' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

$y = x^{\alpha} \Rightarrow \quad y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = a^x \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$ $\qquad$ $y = e^x \Rightarrow \quad y' = e^x$

$y = \log_a x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad$ $y = \ln x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}$

$y = \sin x \Rightarrow \quad y' = \cos x$ $\qquad$ $y = \cos x \Rightarrow \quad y' = -\sin x$

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

$y = \sec x \Rightarrow \quad y' = \sec x \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

$y = \arcsin x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $y = \arccos x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = \operatorname{arc\,tg} x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $y = \operatorname{arc\,cotg} x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

$y = \operatorname{arc\,sec} x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad$ $y = \operatorname{arc\,cosc} x \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

DERIVACIÓ DE FUNCIONS COMPOSTES. REGLA DE LA CADENA.

Donades $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $g:(c,d) \longrightarrow R$ qe manera que $f(a,b) \subset (c,d)$.
$x \longrightarrow u=f(x)$ $u \longrightarrow z=g(u)$

$x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 i g derivable en $f(x_0) = u_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g \circ f$ és derivable en x_0 i $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_y) \cdot f'(x_0)$.

És a dir:
La composició de derivables és derivable i $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

DERIVADA DE FUNCIONS RECÍPROQUES.

Si $f:(a,b) \longrightarrow (c,d)$ té recíproca $f^{-1}:(c,d) \longrightarrow (a,b)$
$x \longrightarrow y$ $y \longrightarrow x$
$x_0 \in (a,b)$ i $y_0 = f(x_0)$

f derivable en x_0 i $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ és derivable en y_0 i $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

MÈTODE DE DERIVACIÓ LOGARÍTMICA.

Donada $y=f(x)$, anomenem **derivada logarítmica** de y, a la derivada del seu logaritme neperià.

Com $h(x) = \ln y = \ln f(x) \Rightarrow h'(x) = \dfrac{y'}{y}$ = derivada logarítmica de y

La derivada logarítmica es pot utilitzar per calcular la derivada d'algunes funcions com la de l'exemple
Calcularem la derivada de $y = x^x$.
Prenent logaritmes neperians als dos membres de la igualtat: $\ln y = \ln x^x = x \ln x$.
Derivant membre a membre:

Derivant membre a membre $\dfrac{y'}{y} = 1 \ln x + x \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

I finalment isolant y ' , obtenim: $y' = y\,(1+\ln x) = x^x\,(1 + \ln x)$.

DIFERENCIAL.

CONCEPTE DE DIFERENCIAL.

Donada y=f(x) una funció real de variable real derivable a l'interval (a,b) i $x \in (a,b)$.
Per definició de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Per tant a un entorn de x podem expressar:

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x) \Rightarrow O(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

on aquesta O(x) és una funció definida en un entorn de x.
Es clar que $\lim_{\Delta x \to 0} O(\Delta x) = 0$.
De l'expressió (1) en podem deduir: $\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + O(\Delta x)\cdot\Delta x$
que expressa Δy com una suma de dos termes .
El primer terme $f'(x)\cdot \Delta x$ rep el nom de **diferencial de y** = dy, i el segon tendeix a zero molt ràpidament.

Observem que quan f = identitat $\Rightarrow$ y =f(x)=x $\Rightarrow$ y ' =1 $\Rightarrow$ dy = dx =1· Δx =Δx
i per tant $\Rightarrow$ Δx = dx = diferencial de x.
Amb el que, per una funció f derivable, la seva diferencial és : $dy = f'(x)\cdot dx$
Aquesta expressió justifica la notació de la derivada com $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

IDEA D'APROXIMACIÓ LINEAL.

L'experiència ens diu, que si dibuixem la recta tangent a una funció en un punt, prop del punt de tangència és difícil de distingir entre la gràfica de la funció i la recta tangent. Aquest fet el podem aprofitar i aproximar la corba per la recta tangent.

Com la diferencial d'una funció y és dy = y '·dx, les regles de diferenciació són bàsicament les mateixes que les de derivació, en remarcarem algunes:

La diferencial d'una constant és 0.
La diferencial d'una constant per una funció és la constant per la diferencial de la funció.
La diferencial d'una suma és la suma de les diferencials.
Diferencial d'un producte és la diferencial del primer factor pel segon mes la diferencial del segon factor pel primer . y = u v $\Rightarrow$ dy = v du + u dv

CREIXEMENT I DECREIXEMENT.

Donada $f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$, diem que:

$$f \text{ és \textbf{creixent} en } x_0 \Leftrightarrow \exists\, U \text{ entorn de } x_0 \text{ i } \forall\, x \in U \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

És a dir:

f és creixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0.

$$f \text{ \textbf{decreixent} en } x_0 \Leftrightarrow \exists\, U \text{ entorn de } x_0 \text{ i } \forall\, x \in U \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x) \end{cases}$$

És a dir:

f és decreixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0

PROPIETATS .

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

f creixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.

f decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f creixent en x_0 .

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f decreixent en x_0 .

Observació: Combinant les dues propietats anteriors, tenim que: **Per estudiar el creixement d'una funció, sols ens cal estudiar el signe que té la seva derivada.**

EXTREMS D'UNA FUNCIÓ.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ diem que:

$x_0 \in [a,b]$ és **màxim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes gran de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és **mínim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes petit de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ extrem absolut de f a $[a,b] \Leftrightarrow x_0$ és màxim o mínim absolut

$x_0 \in (a,b)$ és màxim relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per x properes a x_0 , $f(x_0)$ és el valor mes gran de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és mínim relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per x properes a x_0 , $f(x_0)$ és el valor mes petit de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és extrem relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow x_0$ és màxim o mínim relatiu .

PROPIETAT.

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0.
x_0 extrem relatiu de f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

TEOREMA DE ROLLE.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ f contínua a $[a,b]$ i derivable a (a,b)
$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ de manera que $f'(c) = 0$.

TEOREMA DELS INCREMENTS FINITS.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ **f contínua a $[a,b]$ i derivable a $(a,b) \Rightarrow$**

$\Rightarrow$ existeix $c \in (a,b)$ de manera que $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

geomètricament, aquest teorema, ens diu que:
si tenim una funció i li considerem una corda, sempre podem trobar una tangent a la funció, que sigui paral·lela a aquesta corda.

TEOREMA DE CAUCHY.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ i $g:[a,b] \longrightarrow R$

f i g contínues a [a,b] i derivables a (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ de manera que $\big(f(b) - f(a) \big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a) \big)\, f'(c)$

O bé:

Si $g(a) \neq g(b)$, aquest resultat s'acostuma a expressar en la forma:

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ de manera que } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

REGLA DE L'HÔPITAL.

f i g contínues i derivables en un entorn de x_0

$$f(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad g(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OBSERVACIONS:

- Per aplicar la regla de l'Hôpital és necessari que el límit inicial sigui una indeterminada en la forma 0/0, tot i que també pot aplicar-se directament a indeterminades del tipus ∞/∞.
- La regla de l'Hôpital també pot aplicar-se quan fem límits a l'infinit, $x \longrightarrow \infty$.
- Fent alguns canvis, també facilita el càlcul d'indeterminades del tipus $0 \cdot \infty$, 0^0 i 1^∞

CONCAVITAT, CONVEXITAT I INFLEXIONS.

Donada la funció $y=f(x)$ derivable en el punt x_0, considerem la recta tangent a aquesta funció en aquest punt.

Diem que:

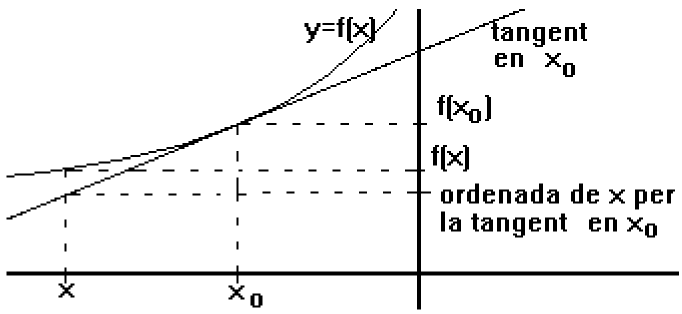
f té la concavitat dirigida cap amunt en x_0 o que f còncava en x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A un entorn de x_0, la corba està per sobre de la tangent en x_0 .

$\Leftrightarrow$ Pels punts propers a x_0, les imatges per la corba són majors que les imatges per la tangent en x_0 .

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq$ ordenada de x per la tangent en x_0

$\Leftrightarrow \exists U$ entorn de x_0 i $\forall x \in U$ $f(x) \geq$ ordenada de x per la tangent en x_0



f és convexa en x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists\delta>0$ i $\forall x$ $|x - x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\leq$ ordenada de x per la tangent a x_0

$\Leftrightarrow\exists U$ entorn de x_0 i $\forall x \in U$ $f(x)\leq$ ordenada de x per la tangent a x_0

$\Leftrightarrow$ Pels punts propers a x_0 les imatges per la corba són menors que les imatges per la tangent en x_0 .

$\Leftrightarrow$ A un entorn de x_0 , la corba està per sota de la tangent en x_0

x_0 és un punt d'inflexió de f $\Leftrightarrow$ en x_0 es produeix un canvi de concavitat .

PROPIETATS.

f:(a,b) $\longrightarrow$R n cop derivable amb continuïtat en $x_0 \Rightarrow$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow$ f còncava en x_0

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ f convexa en x_0

i si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) = ..= f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{n parell} \Rightarrow \begin{cases} f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \text{f còncava en } x_0 \\ f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \text{f convexa en } x_0 \end{cases} \\ \text{n imparell} \Rightarrow x_0 \text{ és punt d'inflexió .} \end{cases}$$

PROPIETAT

f n cops derivable amb continuïtat en punt x_0, es compleix:

x_0 màxim relatiu $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0) =...= f^{n-1)}(x_0) =0$ i $f^{n)}(x_0)<0$ i n parell

x_0 mínim relatiu $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0) =...= f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) >0$ i n parell.

x_0 és punt d'inflexió $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) =...= f^{n-1)}(x_0) =0$ i $f^{n)}(x_0) \neq 0$ i n imparell.

REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS.

ASÍMPTOTES.

Les asímptotes a una funció són rectes que donen una idea sobre el comportament de la funció, quan les variables s'apropem a l'infinit.
Donada la corba y= f(x) , direm que un punt $P=(x_0,y_0)$ **s'allunya indefinidament sobre la corba** $\Leftrightarrow$ $|P| \longrightarrow \infty$ $\Leftrightarrow$ P és de la corba $y_0=f(x_0)$ i x_0 i/o y_0 tendeixen a $\pm\infty$.

La recta r és **una asímptota** a y=f(x) $\Leftrightarrow d(P,r)\xrightarrow[|P|\to\infty]{} 0.$

TIPUS I CÀLCUL DE LES ASÍMPTOTES.

Donada la corba y = f(x) diem que:

La recta x = a és una asímptota vertical $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ **.**

Observem que les asímptotes verticals, sols poden existir en els punts de discontinuïtat de la funció.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols poden haver-hi asímptotes verticals en els zeros de Q(x)

La recta y = a és asímptota horitzontal $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ **o** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ **.**

Com a molt, hi ha dues asímptotes horitzontals, una si anem cap a $+\infty$ i l'altra per a $-\infty$.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha asímptota horitzontal quan grau $P(x) \leq$ grau Q(x).

y = mx + n és asímptota obliqua $\Leftrightarrow \exists\, m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **i** $\exists\, n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

o $\exists\, m = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **i** $\exists\, n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$

les asímptotes horitzontals són un cas particular de les obliqües, el que correspon a m=0.

Es clar que com a molt hi ha dues asímptotes obliqües, una per $+\infty$ i l'altra per $-\infty$.

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha asímptota obliqua quan grau Q(x)=grau P(x)+1.

PARITAT.

Donada la funció y=f(x) diem que:

f parella $\Leftrightarrow \forall x \in$ **dom f** $f(x) = f(-x) \Leftrightarrow$ **f simètrica respecte l'eix de les Y.**

f senars $\Leftrightarrow \forall x \in$ **dom f** $f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow$ **f simètrica respecte del punt (0,0)**

- Hi ha funcions que no són ni parelles ni senars.
- Paritat $\Rightarrow$ simetria, però no del revés.

PERIODICITAT.

Una funció y=f(x) periòdica de període $\pi \neq 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in$ **dom f** $f(x+\pi) = f(x)$**.**

per conèixer una funció periòdica, n'hi ha prou a estudiar-la a un interval de longitud el seu període.

ESTUDI I REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS.

L'estudi gràfic d'una funció, és el procés que consisteix a estudiar els trets fonamentals d'una corba amb l'objectiu final de fer-ne la seva representació gràfica.
Sovint, en tindrem prou en fer un esquema senzill del gràfic de la funció i ,sens dubte, no caldrà realitzar tots i cada un dels passos.
Amb tot a l'exemple següent hi són tots.

Exemple:

Estudi gràfic de la funció $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

Domini:
Per ser un quocient de polinomis, el seu domini coincideix amb el seu camp de continuïtat i el de derivabilitat. Dom = R\{-1} .

Paritat:
com $y(-x) = \dfrac{-x^3}{(1-x)^2}$

$y(-x) \neq y(x) \Rightarrow$ no és parell i $y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$ no és imparell.

Periodicitat:
És clar que no és periòdica, doncs és un quocient de polinomis.
Si ho volem comprovar n'hi ha prou en veure que $y(0+P) = y(0) \Rightarrow P = 0$.

$y(0+P) = \dfrac{P^3}{(1+P)^2}$ $\quad y(0) = 0$

si fos periòdica $y(0+P) = y(0) \Rightarrow \dfrac{P^3}{(1-P)^2} = 0 \Rightarrow P=0 \Rightarrow$ no periòdica.

Asímptotes:

- Verticals: L'únic punt de discontinuïtat és el -1 per tant sols cal mirar x=-1

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ és asímptota horitzontal.}$$

- Horitzontals: El $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \infty \Rightarrow$ no té asímptota horitzontal

- Obliqües: $\displaystyle m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1+x)^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(1+x)^2} = -2$$

per tant la recta $y = x - 2$ és una asímptota obliqua.

Extrems i creixement:

Derivant la funció obtenim: $y' = \dfrac{x^3+3x^2}{(1+x)^3}$

Si fem y ' = 0 per tal de trobar els punts crítics $\Rightarrow$

$y' = 0 \Rightarrow x^3+3x^2=0 \Rightarrow x^2(x+3)=0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -3$.

Els intervals de monotonia ens venen determinats per -3, 0 que són els punts crítics i pel punt de discontinuïtat.

$-10\in]-\infty,-3[$ $y'(-10)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]-\infty,-3[$
$-2 \in]-3,-1[$ $y'(-2)<0 \Rightarrow$ y decreixent a $]-3,-1[$
$-0.5\in]-1,0[$ $y'(-0.5)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]-1,0[$
$1\in]0,\infty[$ $y'(1)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]1,\infty[$.

D'aquí en deduïm també que (-3,y(-3)) és màxim.

Concavitat i punts d'inflexió:

Trobem ara y" : $y'' = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$

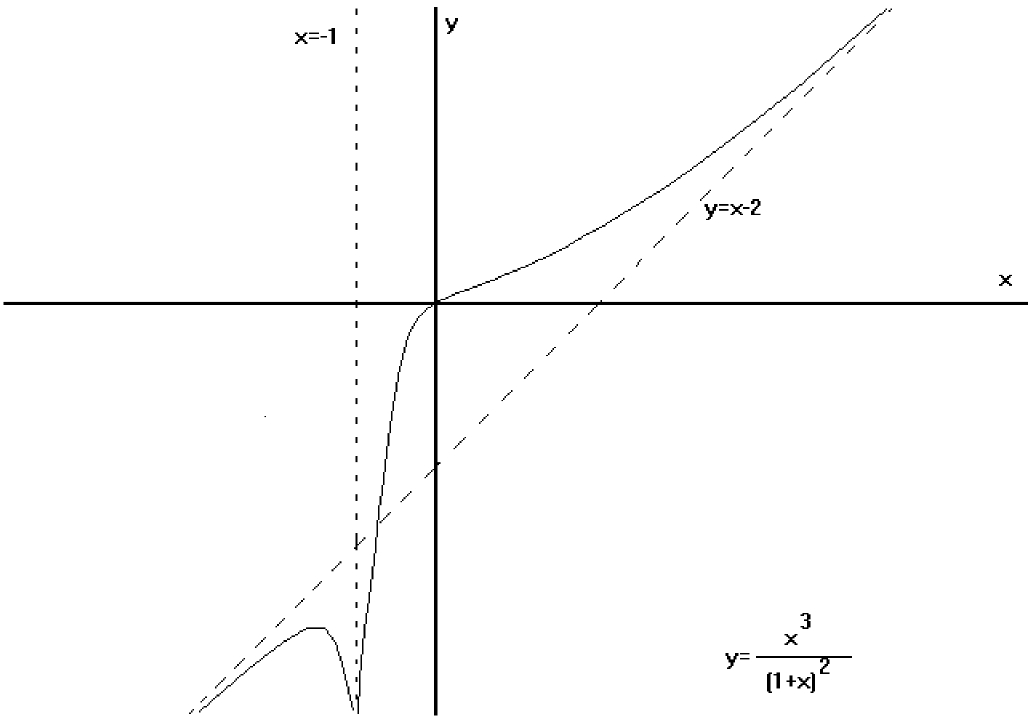
Si $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Els intervals de concavitat venen determinats pel zero de la segona derivada i pel punt de discontinuïtat:

$-10\in]-\infty,-1[$ $y''(-10)<0 \Rightarrow$ y $\cap$ a $]-\infty,-1[$
$-0.5\in]-1,0[$ $y''(-0.5)<0 \Rightarrow$ y $\cap$ a $]-1,0[$
$1\in]0,\infty[$ $y''(1)<0 \Rightarrow$ y $\cup$ a $]0,\infty[$

D'aquí deduïm que el (0,y(0)) és un punt d'inflexió.

Finalment, construïm el **gràfic**:



PROBLEMES DE MÀXIMS I MÍNIMS.

Els "problemes de màxims i mínims" són aquells problemes en què cal trobar, si hi són, els valors de les variables que aconsegueixen fer màxima o mínima una característica determinada.

El procediment general de resolució d'aquests problemes és el següent:

S'expressa la característica a optimitzar, com a funció de varies variables: F(x,y,z,t...).

Es troben els lligams entre les variables, que ens permeten obtenir cada una d'aquestes a partir d'una de sola. y=y(x) , z=z(x), t=t(x),... .

Aconseguim així expressar la característica a optimitzar com a funció d'una sola variable:

$$F(x,y,z,t,...)=F(x,y(x),z(x),t(x),...)=F(x).$$

Calculem els punts crítics de F(x), solucionant l'equació $F'(x)=0 \Rightarrow x_0, x_1, ... x_n$ punts crítics.

Esbrinem quins d'aquests punts són extrems per qualsevol dels mètodes coneguts: signe F'', estudi del creixement de F, realització de petites variacions als valors x_j.

Escollim els valors x_j que s'ajustin a l'enunciat i determinem quins són els valors de les altres variables.

Exemple:
Trobeu dos números que sumin 28 i que el seu producte sigui màxim.

Si anomenem x i y a aquest dos números, és clar que cal optimitzar la funció P = xy.

Ara bé, l'enunciat diu que x i y sumen 28 $\Rightarrow$ x + y = 28 $\Rightarrow$ y = 28 - x.

Substituint a la funció a optimitzar s'obté: P = x(28-x) = 28x-x2, funció que sols depèn d'una variable.

Trobem els punts crítics de P.

$$P' = 28 - 2x \Rightarrow P'=0 \Rightarrow 28 - 2x = 0 \Rightarrow x = 14.$$

Com $P'' = -2 \Rightarrow P''(14)<0 \Rightarrow x = 14$ és un màxim de P.

Finalment calculem la y que li correspon: $y = 28 - x \Rightarrow y = 28 - 14 = 14.$

Per tant, els números buscats són: x = 14 i y = 14 .