APLICACIONS.

Si tenim A i B dos conjunts no buits , entenem per aplicació entre A i B a qualsevol llei que a cada element $x \in A$, li assigna un únic element $y \in B$ que se'n diu la imatge de x, i el representem com $y=f(x)$.

Del conjunt A, en diem **de sortida** i els seus elements són els originals, mentre que del conjunt B, se'n diu **final** .

El **gràfic** de l'aplicació és conjunt dels parells ordenats, on el primer element és de A i el segon element és la seva imatge. $G=\{(x,f(x)), x \in A\}$.

El conjunt $f(A)=\{y \in B \ / \ y=f(x)\}$ = conjunt dels elements que són imatges d'algun element de A, es coneix amb el nom de **conjunt imatge o conjunt de les imatges**.

Si $y_0 \in f(A)$ podem considerar les x que tenen per imatge aquest y_0, $\{x \in A \ / \ f(x) = y_0\}$, que representem per i representem per $f^{-1}(x_0)$ i anomenem .**anti-imatges de y_0**

Finalment, acostumem a donar les aplicacions en la forma següent:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

i sovint, si no hi ha dubtes sobre els conjunts A i B, ens limitem a donar una fórmula o llei que permeti trobar, a cada x, la seva imatge.

TIPUS D'APLICACIÓ.

Una aplicació és diu que és **injectiva** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **elements diferents tenen imatges diferents**

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

Una aplicació és diu **exhaustiva** o **suprajectiva $\Leftrightarrow$ tot element del conjunt final admet anti-imatge** $\Leftrightarrow$ $f(A)=B$.

Una aplicació diem que és **bijectiva $\Leftrightarrow$ és simultàniament injectiva i exhaustiva.**

COMPOSICIÓ D'APLICACIONS. FUNCIÓ RECÍPROCA.

Donades les aplicacions $\begin{aligned} f:A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x)=u \end{aligned}$ i $\begin{aligned} g:C &\longrightarrow D \\ u &\longrightarrow g(u)=y \end{aligned}$

Si B és un subconjunt de C, podem considerar

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \subset C \xrightarrow{g} D \\ x &\longrightarrow f(x)=u \longrightarrow g(u)=g(f(x)) \end{aligned} \qquad \text{és a dir:} \qquad \begin{aligned} A &\longrightarrow D \\ x &\longrightarrow g(f(x)) \end{aligned}$$

que anomenem composició de f amb g i expressem com $g \circ f$.

És senzill de comprovar-ne les següents propietats:

- **Associativa : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$**
- En general, **no és commutativa**. $f \circ g \neq g \circ f$
- **Té element neutre que és l'aplicació identitat** $\begin{array}{l} I: A \longrightarrow A \\ \quad x \longrightarrow x \end{array}$ **$f \circ I = f$ i $I \circ f = f$**
- En general **no té element invers** .

  Però si , $\begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ \quad x \longrightarrow f(x) \end{array}$ i $\begin{array}{l} g: B \longrightarrow A \\ \quad y \longrightarrow g(y) \end{array}$

  compleixen que $f \circ g = I$ i $g \circ f = I$, llavors diem que f i g són **recíproques** o **inverses per la composició** $\Leftrightarrow$ en aquest cas, la g s'acostuma a dessignar per f^{-1} .

  Es pot comprovar que:

  f admet inversa per la composició $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

ALGUNES DEFINICIONS SOBRE CONJUNTS REALS.

INTERVALS.

Donats a i b dos nombres reals de manera que $a \leq b$, podem considerar els conjunts següents, que anomenem **intervals**:

Obert $\{x \in R \ / \ a < x < b\} = (a,b) =]a,b[$

Tancat $\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\} = [a,b]$

$\{x \in R \ / \ a \leq x < b\} = [a,b) = [a,b[$ $\quad$ $\{x \in R \ / \ a < x \leq b\} = (a,b] =]a,b]$

$\{x \in R \ / \ a \leq x\} = [a,\infty) = [a,\infty[$ $\quad$ $\{x \in R \ / \ a < x\} = (a,\infty) =]a,\infty[$

$\{x \in R \ / \ x \leq a\} = (-\infty,a] =]-\infty,a]$ $\quad$ $\{x \in R \ / \ x < a\} = (-\infty,a) =]-\infty,a[$

ENTORN.

Donat $A \subset R$ un subconjunt de números reals i $x_0 \in A$, diem que:

A és un entorn de x_0 $\Leftrightarrow$ existeix $r > 0$ de manera que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$.

FITES.

Donat A un subconjunt de reals, diem que:

$k \in R$ és una **fita superior** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\ x \leq k$

$k \in R$ és una **fita inferior** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\ k \leq x$

$k \in R$ és una **fita** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\ -k \leq x \leq k$

A és **fitat** $\Leftrightarrow$ A té fita superior i fita inferior.

S= **suprem** de A $\Leftrightarrow$ S és la mínima de les fites superiors de A.

m= **ínfim** de A $\Leftrightarrow$ m és la màxima de les fites inferiors de A

FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL.

Si tenim A i B dos conjunts no buits de números reals, anomenem **funció real de variable real** de A en B, a qualsevol llei que assigna a cada element x del conjunt A ún únic element y del conjunt B, que s'en diu la imatje de x.

$$\begin{aligned} f:A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

A les funcions reals de variable real, conjunt A on està definida la funció és el **domini** =dom(f), mentre que el conjunt f(A) és el **recorregut**.

La x es coneix per **variable independent** i la y és l'anomenada **variable dependent**.

De cursos anteriors sabem que, fixant uns eixos de coordenades, podem identificar els punts del pla amb els parells ordenats de números reals; llavors el gràfic de la funció no és altra cosa que marcar tots parells ordenats del conjunt $\{(x,f(x))|\ x\in A\}$.

Per determinar una funció, cal especificar el conjunt de sortida, el conjunt final i la fórmula que permet obtenir les imatges; però, sovint donem les funcions només a partir de la fórmula, sobreentenent que el domini serà el conjunt de reals on aquesta fórmula es pot aplicar.
Així parlem de la funció y=1/x, en lloc de donar-la correctament en la forma

$$\begin{aligned} R\backslash\{0\}: &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow 1/x\ . \end{aligned}$$

OPERACIONS AMB FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL.

Donades $f:A \longrightarrow B$ i $g:A' \longrightarrow B'$ reals de variable real, definim:

$$x \longrightarrow f(x) \qquad x \longrightarrow g(x)$$

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
És clar que: El domini de la suma és la intersecció dels dominis de f i g.

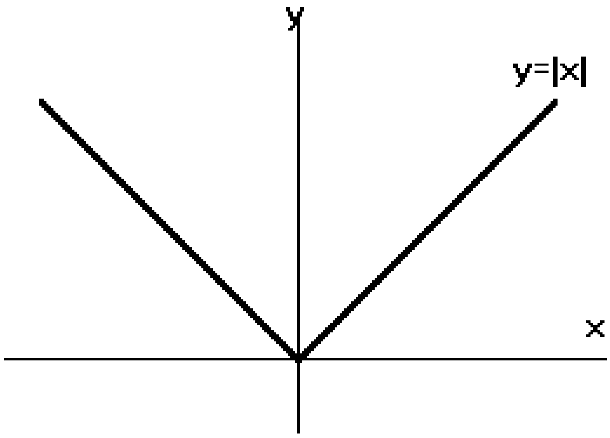
- **És associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h)$.
- **Té element neutre**: l'aplicació $\begin{aligned} 0:R &\longrightarrow R. \\ x &\longrightarrow 0 \end{aligned}$
- **Té element oposat**: la oposada per la suma de y=f(x) és la y=-f(x).
- **És commutativa** $f+g = g+f$.

Producte: $(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
És clar que: El domini delprofucte és la intersecció dels dominis de f i g.

- **És associatiu:** $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$.
- **Té element unitari**: l'aplicació $\begin{aligned} 1:R &\longrightarrow R\ . \\ x &\longrightarrow 1 \end{aligned}$
- **És commutatiu** $f\cdot g = g\cdot f$.
- **És distributiu respecte de la suma** $f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h$
- **En general no hi ha element invers**.

Composició: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.
És clar que:
- **La composició és associativa**.
- **No és commutativa.**
- **La identitat** $I:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és **l'element neutre**.
  $x \longrightarrow I(x)=x$
- **No sempre admet recíproca**.

LA FUNCIÓ VALOR ABSOLUT.
Anomenem valor absolut de x = $|x|$ a l'aplicació real de variable real definida en la forma: $|x| = \begin{cases} x & \text{quan } x \geq 0 \\ -x & \text{quan } x < 0 \end{cases}$



El gràfic de la funció valor absolut és ja que:
si $x<0 \Rightarrow y = -x$ que és una recta
si $x>0 \Rightarrow y = x$ que és una recta
si $x=0 \Rightarrow y = 0$

Algunes de les propietats del valor absolut són:

Valor absolut de la suma és menor o igual que la suma dels valors absoluts.
$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Valor absolut d'un producte és el producte dels valors absoluts.
$$|xy| = |x|\,|y|$$

Diferència de valors absoluts és menor o igual que el valor absolut de la diferència.
$$|x|-|y| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$$

$$|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$$

LÍMITS.

LÍMIT FUNCIONAL.

Donada $y = f(x)$ una funció real de variable real, $\mathbf{l} \in R$ i $\mathbf{x_0} \in R$, diem que:

l és el límit quan x tendeix a x_0 de $f(x) \Leftrightarrow$ $\mathbf{l} = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \mid \forall x \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\mathbf{l}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ U entorn de } \mathbf{l} \ \exists \text{ V entorn de } x_0 \mid f(V) \subset U$$

l és el límit quan x tendeix a x_0 de f(x) quan valors de x propers a x_0 donen lloc a imatges properes a l .

LÍMITS LATERALS.

Donada f funció real de variable real, $\mathbf{l} \in R$ i $x_0 \in R$, diem que:

l és el límit lateral per la dreta quan x tendeix x_0 de f(x)

$$\mathbf{l} = \lim_{x \to x_0+} f(x) \Leftrightarrow \mathbf{l} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x \ x>x_0 \quad |f(x) - \mathbf{l}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ U entorn de } \mathbf{l} \ \exists \text{ V entorn de } x_0 \text{ i } \ \forall x \in V \ \ x > x_0 \Longrightarrow f(x) \in U .$$

És a dir:

Si ens apropem a x_0 a partir de x majors que la x_0, les imatjes, s'apropen a l.

Anàlogament es defineixen els límits laterals per l'esquerra.

l és el **límit lateral per l'esquerra** quan x tendeix x_0 de f(x) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbf{l} = \lim_{x \to x_0-} f(x) \Leftrightarrow \mathbf{l} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Es compleix la següent propietat:

$$\exists \ \mathbf{l} = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = \mathbf{l'} \\ \\ \exists \lim_{x \to x_0-} f(x) = \mathbf{l''} \end{cases} \quad \text{i} \ \ \mathbf{l'} = \mathbf{l''} = \mathbf{l}$$

És a dir:

Existeix límit funcional $\Leftrightarrow$ existeixen límits laterals i coincideixen.

ÀLGEBRA DE LÍMITS.

Donades f i g funcions reals de variable real i $x_0 \in R$ o $x_0 = \pm \infty$, es compleixen les següents propietats tant per a límits laterals com per a límits funcionals. (en el supòsit que existeixin tots els termes que s'indiquen)

El límit d'una constant és la constant. $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$

El límit d'una suma és la suma dels límits $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

El límit d'un producte és el producte dels límits.

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

El límit d'un quocient és el quocient dels límits.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$ sempre i quan $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

El límit d'una potència és la potència del límit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{\alpha} = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^{\alpha}$

El límit d'una exponencial és l'exponencial del límit:

$$\lim_{x \to x_0} g(x)^{f(x)} = \lim_{x \to x_0} g(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

CONCEPTE DE FUNCIÓ CONTÍNUA.

Sigui $y=f(x)$ funció real de variable real i $x_0 \in dom(f)$, llavors diem que :

f és **contínua** en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ **és el mateix fer límits que substituir .**

$$\Leftrightarrow \text{ existeix } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\ \mathbf{l} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ \exists\ \mathbf{l'} = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{l = l' = f(x_0)} \\ \exists\ f(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in dom(f) \text{ i } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \ \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon \ .$$

$$\Leftrightarrow \forall U \text{ entorn de } f(x_0) \ \exists V \text{ entorn de } x_0 \text{ i } f(V) \subset U \ .$$

Intuïtivament, una funció és contínua a x_0, si quan apropem les x a x_0, les imatges s'acosten a $f(x_0)$.

Una funció és contínua a un interval (a,b) $\Leftrightarrow$ és contínua a cada un dels punts de l'interval.

DISCONTINUÏTATS.

Sigui $f: A \longrightarrow R$ real de variable real i $x_0 \in A$, diem que:

x_0 és una **discontinuïtat** de f $\Leftrightarrow$ f no contínua en x_0.

Les discontinuïtats les podem classificar en:

- **Evitables**:
  x_0 és discontinuïtat evitable de $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$
  $$\Leftrightarrow \text{ existeix } \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$
- **De Salt**: x_0 és discontinuïtat de salt$\Leftrightarrow$ **existeixen límits laterals i són diferents**
  $$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$
- **De segona espècie**:

x_0 és discontinuïtat de 2^a espècie $\Leftrightarrow$ no existeix algun dels límits laterals.

Dintre de les discontinuïtats de segona espècie, trobem les discontinuïtats **asimptòtiques**, que es produeixen si algun dels límits laterals és $\pm\infty$.

OPERACIONS AMB FUNCIONS CONTINUES.

Coneixem les següents propietats, vàlides a intervals oberts

Les funcions constants són contínues: $f(x) = k \Rightarrow$ f cont a qualsevol x_0.

La suma de contínues és contínua: f i g contínues en $x_0 \Rightarrow f+g$ cont. en x_0.

El producte de cont. és cont.: f i g contínues en $x_0 \Rightarrow f \cdot g$ cont. en x_0.

El quocient de cont. és contínua excepte quan el denominador és 0:

f i g contínues en x_0 i $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(x)$ contínua en x_0.

La potenciació de contínues: $f(x)$ cont en $x_0 \Rightarrow (f(x))^n$ és contínua en x_0 .

La composició de contínues és contínua.

f contínua en x_0 i g contínua en $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ contínua en x_0 .

ALGUNS EXEMPLES DE FUNCIONS CONTINUES.

- Els polinomis són funcions contínues a tots els reals.
- Els quocients de funcions contínues és una funció contínua excepte en els punts que anul.len el denominador.
- Les arrels de contínues són contínues en el seu domini.
- La funció exponencial és contínua a tots els reals.
- La funció logarítmica és contínua en el seu domini $(0,\infty)$.
- Les funcions circulars i circulars inverses són cont. en els seus dominis.
- El valor absolut és contínua a tots els reals.

PROPIETATS DE LES FUNCIONS CONTINUES.

CONSERVACIÓ DEL SIGNE EN UN ENTORN.

f contínua en x_0 i $f(x_0)>0 \Rightarrow \exists \delta>0$ de manera que $\forall x \; |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.

o bé

f contínua en x_0 i $f(x_0)<0 \Rightarrow \exists \delta>0$ de manera que $\forall x \; |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$.

És a dir : **Si una funció és contínua en x_0 i en x_0 $f(x_0) \neq 0$, existeix un entorn de x_0 en el que la funció té sempre el mateix signe**.

PROPIETAT.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$

f contínua a l'interval tancat $[a,b] \Rightarrow \exists K>0$ i $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| < K$.

És a dir: **f contínua a $[a,b] \Rightarrow$ f fitada superior i inferiorment.**

TEOREMA DE WEIERSTRASS.

$f:[a,b] \longrightarrow R$

f contínua a $[a,b] \Rightarrow \exists \; x_M, x_m \in [a,b]$ i $\forall x \in [a,b] \;\; f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

És a dir :

f contínua a $[a,b] \Rightarrow \exists \; x_M, x_m \in [a,b]$ màxim i mínim absoluts de f a [a,b].

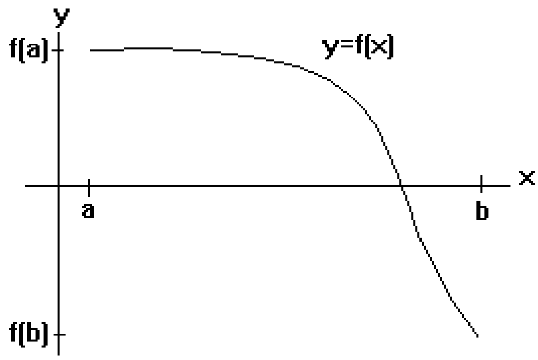
TEOREMA DE BOLZANO.

Sigui $f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua.

Si f(a) i f(b) tenen signes diferents $\Rightarrow$ f té algun zero a l'interval (a,b).

És a dir:

$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists \mathbf{z}\in(a,b) \mid f(\mathbf{z})=0$



Intuïtivament si $f(a)>0$ i $f(b)<0$ i el gràfic de f no té talls entre a i b, per passar de positiu a negatiu, cal travessar en algun punt l'eix X, i en el que l'atravessem serà un zero de la funció.

PROPIETAT.

Sigui $f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua i $h \in R$

$f(a)<h<f(b)$ o $f(b)<h<f(a) \Rightarrow$ existeix $z\in(a,b)$ i $f(z)=h$.

CÀLCUL DEL SIGNE D'UNA FUNCIÓ.

Per calcular els intervals on una funció $y=f(x)$ és positiva o negativa, podem utilitzar el teorema de Bolzano de la següent manera:

Considerem els punts de discontinuïtat i els zeros de la funció; aquests punts ens marquen un seguit d'intervals on la funció és contínua i no és zero

Llavors a cada un d'aquests intervals, la funció té sempre el mateix signe; si no fos així podríem aplicar el teorema de Bolzano a la funció en aquest interval i hi trobaríem un zero.
Prenent un punt de cada interval i mirant quin signe té la funció en aquest punt, tindrem que a tot l'interval la funció té aquest signe.

APROXIMACIÓ DE ZEROS - MÈTODE DE LA BISECCIÓ.

Exemple: Calculeu una solució de l'equació $x = \cos x$?

Considerem la funció $y(x)=x-\cos x$, y és contínua a tots els reals per ser suma de contínues. Resoldre l'equació, és trobar els zeros de y.

Prenem dos punts entre els quals suposem que hi ha un zero, per exemple el 0 i l'1 .
Com $y(0)=0-1=-1<0$ i $y(1)=1-\cos 1=0.459>0 \Rightarrow$ entre 0 i 1 hi ha una solució.

Prenem el punt mitjà entre 0 i 1 , és el 0.5 .
Com $y(0.5)=-0.37<0$ i $y(1)>0 \Rightarrow$ entre 0.5 i 1 hi ha una solució.

Prenem el punt mitjà entre 0.5 i 1 , és el 0.75 .
Com $y(0.75)=0.018>0$ i $y(0.5)<0 \Rightarrow$ entre 0.5 i 0.75 hi ha una solució.

Continuant aquest procés, podem aproximar la solució de l'equació.