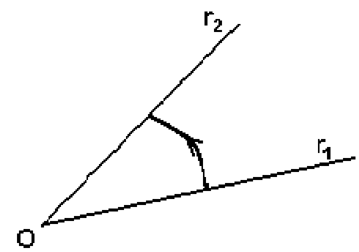
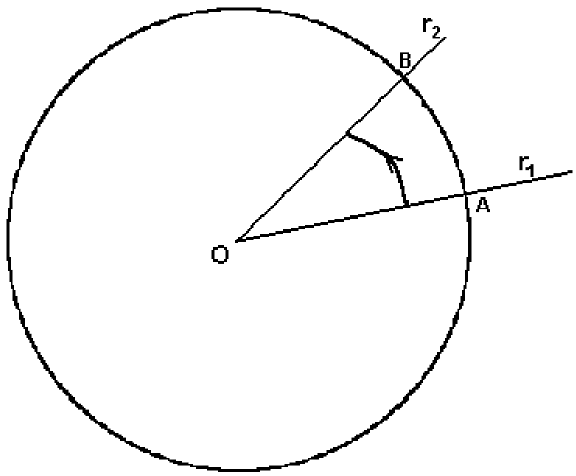
Trigonometria

Concepte i mesura d'angles

Si tenim dues semirectes $\mathbf{r_1}$ i $\mathbf{r_2}$ amb l'origen **O** comú, de la regió de l'espai que recorre r_1 quan la fer girar sobre l'origen fins a la semirecta r_2, en diem angle.

De les dues semirectes se'n diem els costats de l'angle i del origen de les semirectes vèrtex.

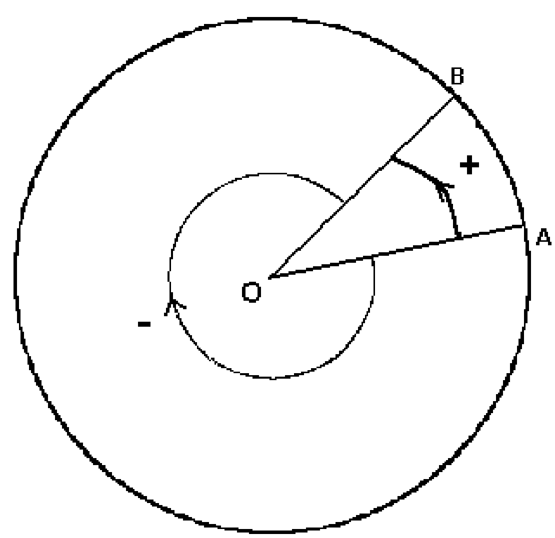




Observeu que si fem coincidir el vèrtex de l'angle amb el centre d'una circumferència, la intersecció dels costats de l'angle amb la circumferència ens determina un arc de circumferència AOB. I a l'inrevés, si tenim un arc de circumferència, podem determinar un angle.

Per aquesta raó tractem els angle com a arcs de circumferència.

Com la idea d'angle ens ve donada per girar el primer costat sobre el segon, de forma totalment arbitraria s'ha establert que l'angle és positiu si gira en sentit contrari de les busques del rellotge i negatiu quan ho fa en el mateix sentit..



Mesura d'angles

Com hem identificat els angle amb arcs de circumferència, a l'hora de mesurar els angle ho fem a partit de trossos de circumferència.
Així un arc és mitja circumferència , diem que és una angle pla; o si és una quarta part de circumferència es diu que és un angle recte.
Pel que fa a com es mesuren numèricament els angles, es defineix la unitat segons l'ús que es dona a l'angle, i les més habituals són:

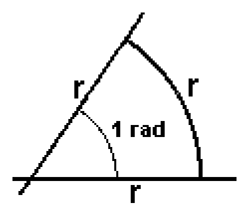
- **Graus sexagesimals**
  La circumferència es divideix en 360º i així un angle recte té 90º , cada grau el dividim en 60' i cada minut en 60".

  1 circumferència = 360º   1º = 60'   1'= 60''

- **Graus centesimals.**
  La circumferència és divideix en 400^g i un angle recte té 100^g, un grau centesimal el dividim en 100 minuts i cada minut en 100 segons.

  1 circumferència = 400^g $1^g = 100^{min}$ $1^{min} = 100^{seg}$

- **Radiants.**
  Definim un radià com l'arc de circumferència, que rectificat, coincideix amb el radi de la circumferència.
  Com la longitud d'una circumferència és $2\cdot\pi\cdot r$, tindrem que una circumferència tindrà $2\cdot\pi$ radiants i un recte té $\pi/2$ rad.



  1 circumferència = 2π

Per canviar d'unitat, en hi ha prou en utilitzar factors de conversió basant-se en que :
1 circumferència = 360º = 400^g = 2π rad.

Exemples:

Expressem en graus sexagesimals l'angle de 1 rad.

$$1\,\text{rad} = 1\,\text{rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = 57.29578^\circ$$

1rad = 57.29578º = 57º + 0.29578º

com 1º= 60' $\Rightarrow 0.29578^\circ = 0.29578^\circ\cdot\frac{60'}{1^\circ} = 17.7468'$

$\Rightarrow$1rad = 57º 17' + 0.7468' .

com 1' =60" $\Rightarrow$ $0.7468' = 0.7468'\cdot\frac{60''}{1'} = 44.808''$

i per tant 1rad = 57.29578º = 57º 17' 44.808"

Expressem en radiants un angle α que en graus sexagesimals és de α= 29º 6' 21" .

Com 60" = 1' ⇒ $21'' = 21'' \cdot \frac{1'}{60''} = 0.35'$ ⇒ 29º 6' 21" = 29º 6.35' .

Com 60' = 1º ⇒ $6.35' = 6.35' \cdot \frac{1^\circ}{60'} = 0.10583^\circ$

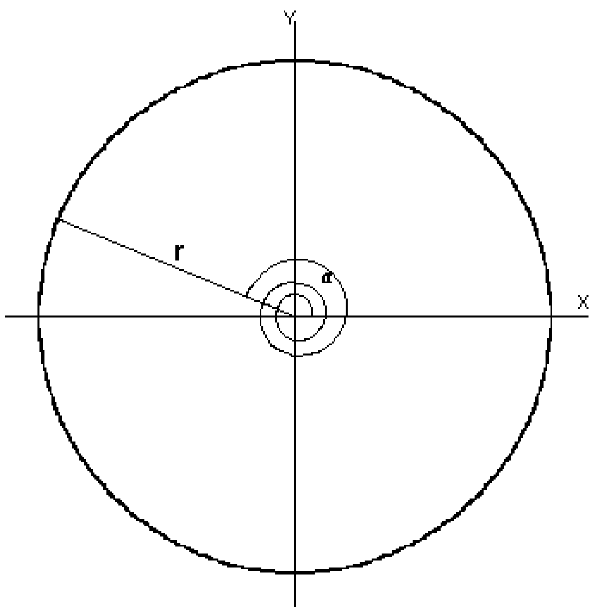
amb el que l'angle de α= 29º 6' 21"= 29.10583º .

I finalment com 180º = π rad ⇒

$\alpha = 29.10583^\circ = 29.10583^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 0.50799$ rad.

Circumferència trigonomètrica.

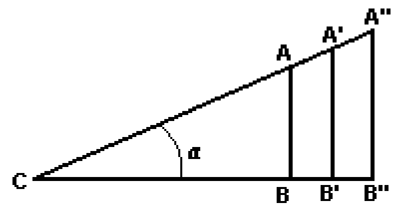
La circumferència trigonomètrica no és altra cosa que una circumferència on el seu centre coincideix amb l'origen de coordenades d'uns eixos cartesians. Quan el radi de la circumferència és 1, s'acostuma a dir-ne la circumferència unitat.



Centrar un angle a la circumferència trigonomètrica és li fem coincidir el seu primer costat amb el semieix OX i el segon costat cau lliurement en un dels quatre quadrants dels eixos; per això parlem d'angles del primer, del segon, del tercer o del quant quadrant.

Raons trigonomètriques dels angles d'un triangle rectangle

Donat un angle agut α, considerem els triangles rectangles que tenen α com un dels seus angles.



Per teorema de Thales, podem garantir que

$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \ldots = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} \Rightarrow$ la relació $\frac{\text{catet oposat}}{\text{hitotenusa}}$ no depèn del triangle rectangle concret,

si no de l'angle α i per això definim: $\sin\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$.

Anàlogament la relació $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \ldots = \frac{\overline{OB''}}{\overline{OA''}} = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$ sols depèn de l'angle

α i per això definim: $\cos\alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$

Altres relacions que podem trobar a aquests triangles en posició de Thales, ens permeten definir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \ldots = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \text{tg}\ \alpha$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}} = \ldots = \frac{\overline{OB''}}{\overline{A''B''}} = \frac{\text{catet contigu}}{\text{catet oposat}} = \text{ctg}\ \alpha$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \ldots = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OB''}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{catet contigu}} = \sec\ \alpha$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} = \ldots = \frac{\overline{OA''}}{\overline{A''B''}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{catet oposat}} = \text{cosec}\ \alpha$$

Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

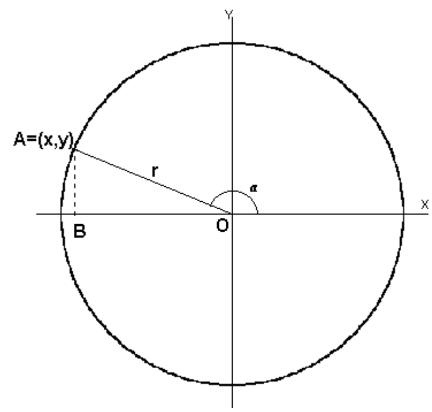
Considerem la circumferència trigonomètrica de radi, i hi centrem hi centrem l'angle α .El segon costat de l'angle ens defineix un únic punt A de la circumferència A=(x,y).

Llavors definim

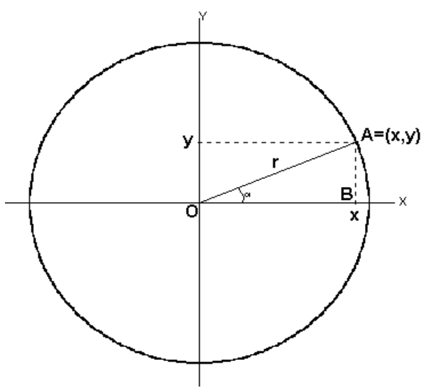
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}$$



Observem que si l'angle $\alpha\in(0,\pi/2)$ forma part d'un triangle rectangle, aquestes definicions coincideixen amb les que ja teníem, ja que



$$\sin\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{y}{x}$$

A partit d'aquestes definicions és evident que:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

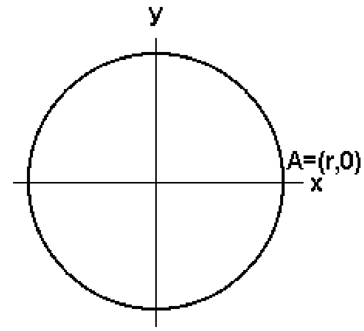
També és obvi que si dos angle que difereixen en voltes senceres els dos tindran les mateixes raons trigonomètriques.

Signe de les raons trigonomètriques:

	X	Y	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
1r Quadrant	+	+	+	+	+	+	+	+
2n Quadrant	-	+	+	-	-	-	-	+
3r Quadrant	-	-	-	-	+	+	-	-
4rt Quadrant	+	-	-	+	-	-	+	-

Raons trigonomètriques dels angles de 0, π/6, π/4, π/3 i π/2.

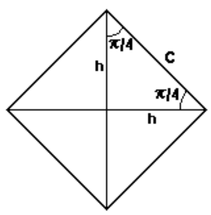
Raons trigonomètriques de 0 .



Quan centrem l'angle de 0 radiants a la circumferència, el segon costats de l'angle talla la circumferència en el punt A=(r,0) i per tant

$\sin 0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$ i $\cos 0 = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$

Raons trigonomètriques de π/4 .



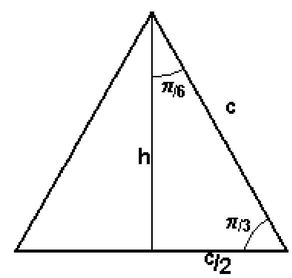
Considerem un quadrat de costat **c** i tracem les diagonals.

Fixant-nos en un dels triangles veiem que, és rectangle amb hipotenusa és c i catets iguals que en direm h .
Llavors pel teorema de Pitàgores $c^2 = h^2 + h^2 \Rightarrow c^2 = 2h^2 \Rightarrow$

$h = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot c}{2}$

amb el que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Raons trigonomètriques de π/3 i π/6 .



Considerem un triangle equilàters de costat c i tracem-li una altura
Se'ns forma un triangle rectangle de hipotenusa c i catets h i c/2.

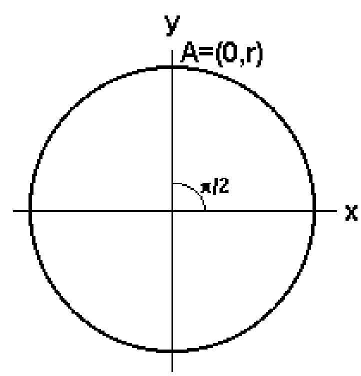
Pel teorema de Pitàgores tenim que: $c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}}\cdot c = \frac{\sqrt{3}\cdot c}{2}$

Com: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$

i $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$

Raons trigonomètriques de π/2 .



Quan centrem l'angle de π/2 a la circumferència, el punt on el segon costat de l'angle la talla és A=(0,r), amb el que:

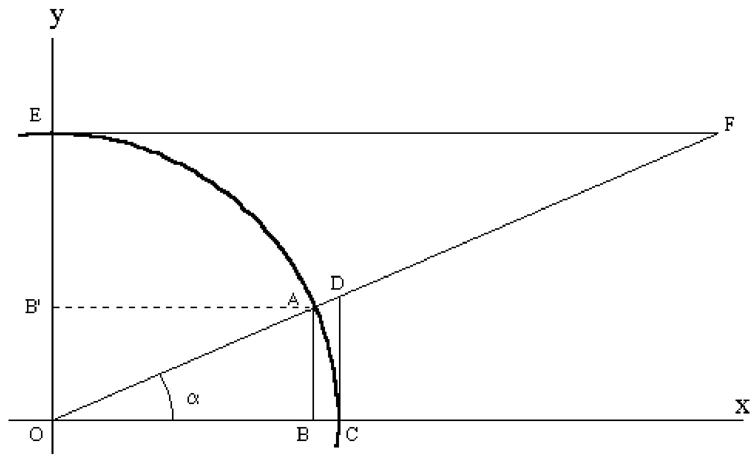
$\sin\pi/2 = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$ i $\cos\pi/2 = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

Línies trigonomètriques.

Considerem la circumferència unitat (radi = 1) on hi centrem l'angle α .
El segon costat de l'angle, ens defineix un únic punt de la circumferència, el punt A.

Projectant A sobre l'eix de les X, obtenim el punt B.

Anomenant C al punt de tall de la circumferència amb l'eix X i traçant la recta tangent a la circumferència pel punt C, tenim que aquesta recta talla al segon costat de l'angle en el punt D

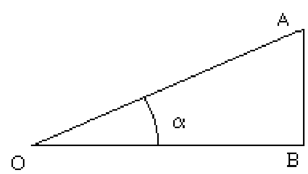


Si ara anomenem E al punt de tall de la circumferència amb l'eix Y i tracem la tangent a la circumferència pel punt E, obtenim la intersecció d'aquesta recta tangent amb el segon costat de l'angle i en diem F .

Finalment projectem A sobre l'eix de les Y i obtenim el punt B',

Sinus i cosinus

Considerem triangle ABO on és clar que:

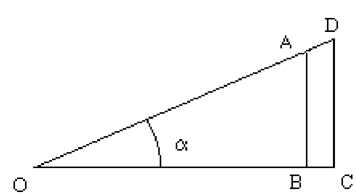


$$\sin\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{\text{radi}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\text{radi}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB}$$

Tangent i Secant

Prenent el s triangles ABO i DCO. triangles rectangles que estan en posició de Thales



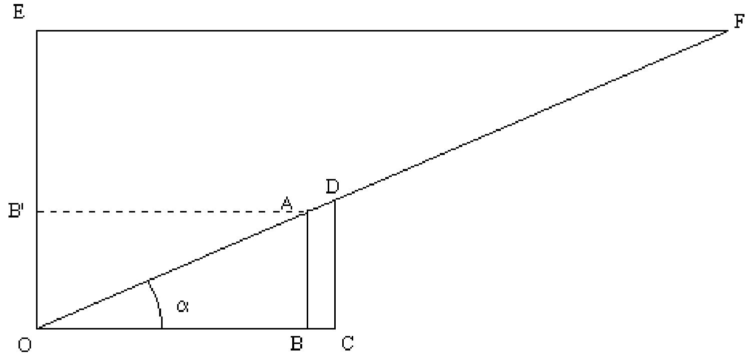
És clar que

$$tg\ \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{\text{radi}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD}$$

$$sec\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{catet contigu}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{\text{radi}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

Cotangent i Cosecant.

Finalment Considerem tots els triangle que se'ns formen:



Tenim que:

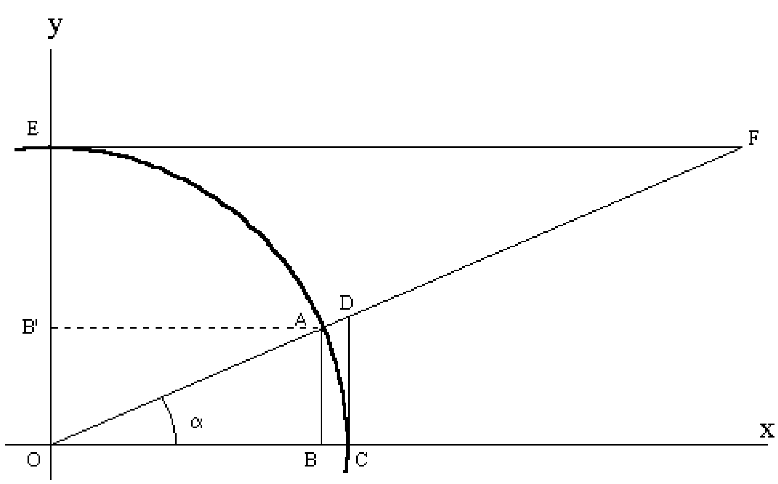
$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\text{catet contigut}}{\text{catet oposat}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{EF}}{\text{radi}} = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$$

i

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{catet oposat}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OF}}{\text{radi}} = \frac{\overline{OF}}{1} = \overline{OF}$$

Per tant

Si el radi és 1, les raons trigonomètriques de l'angle α coincideixen amb la longitud dels segments



$\sin\alpha = \overline{AB}$

$\cos\alpha = \overline{OB}$

$\text{tg}\,\alpha = \overline{CD}$

$\sec\alpha = \overline{OD}$

$\text{cosec}\,\alpha = \overline{OF}$

$\text{ctg}\,\alpha = \overline{EF}$

Funcions circulars.

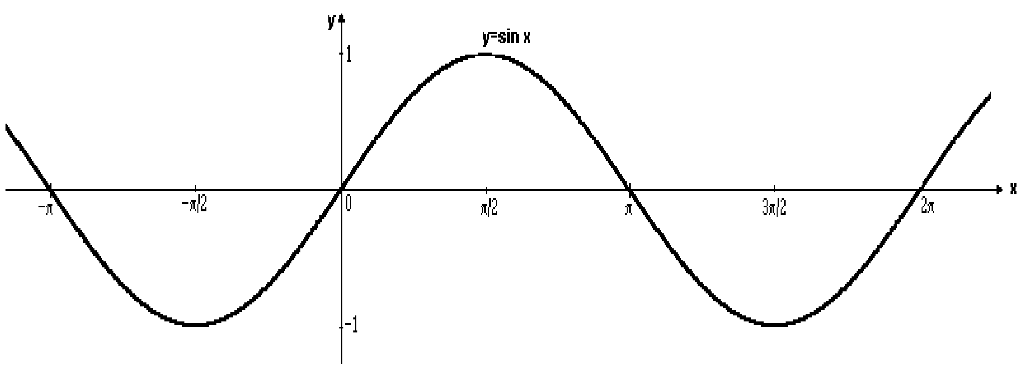
Funció sinus

Definim la funció sinus com una funció que a cada nombre real α, li assigna el sinus de l'angle que té α radiants.

$$\textbf{sin: } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\alpha \longrightarrow \textbf{sinus de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants}$$

Domini = $\mathbb{R}$
Recorregut = [-1,1] .
Periòdica de període $2\cdot\pi$ $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
Es imparell $\sin(-x) = -\sin x$
Creix en el primer i quart quadrant i decreix en el segon i tercer.
Es contínua.



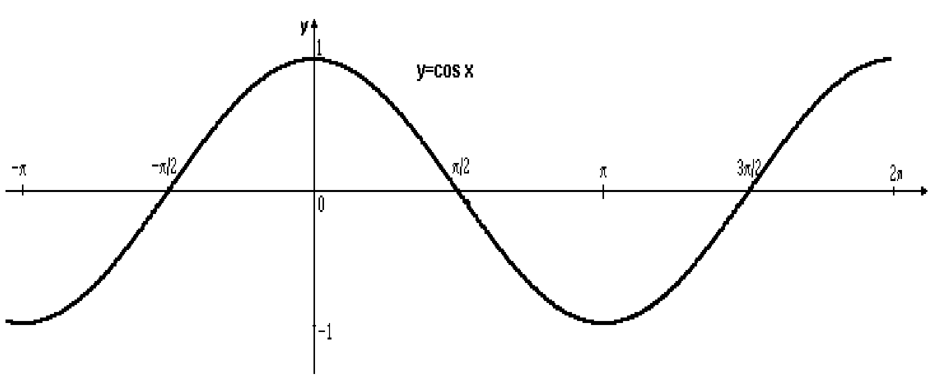
Funció cosinus.

Definim la funció cosinus com una funció que a cada nombre real α, li assigna el cosinus de l'angle que té α radiants.

$$\textbf{cos: } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\alpha \longrightarrow \textbf{cosinus de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants}$$

Domini = $\mathbf{R}$
Recorregut = [-1,1] .
Periòdica de període $2\cdot\pi$ $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
Es parell $\cos(-x) = \cos x$
Decreix en el primer i segon quadrants i creix en el tercer i quart.
Es contínua.

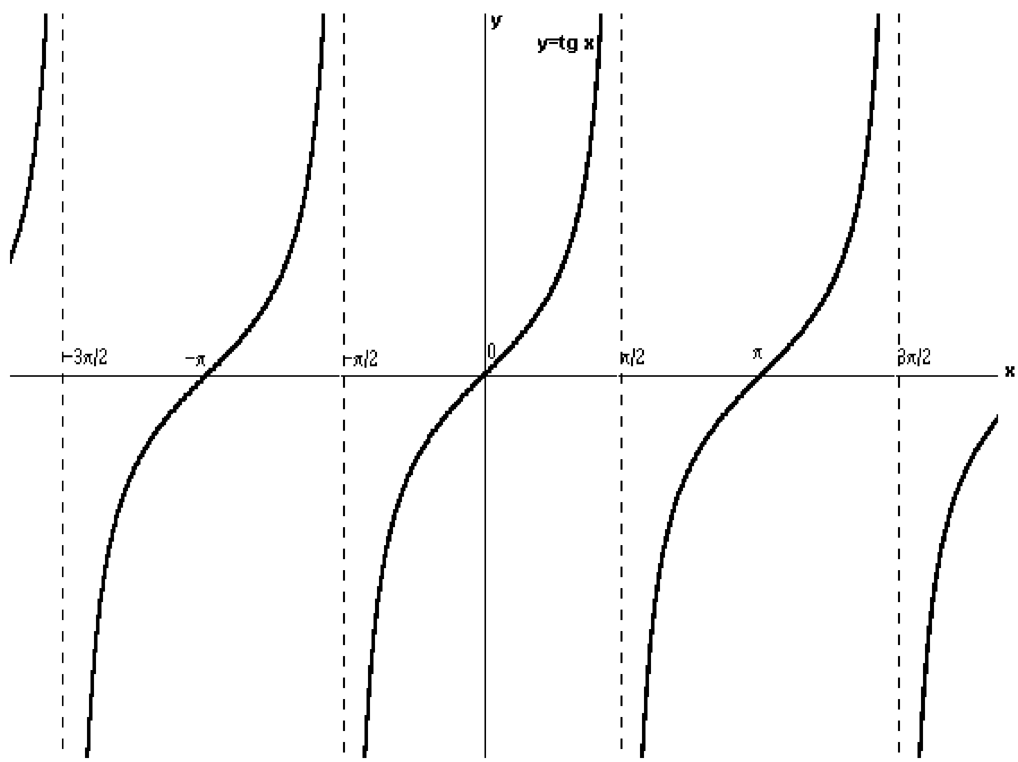


Funció tangent.

Definim la funció tangent com una funció que a cada nombre real α, li assigna la tangent de l'angle que té α radiants.

$$\mathbf{tg:}\ \mathbf{R}\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi \mid k\in Z\} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\alpha \longrightarrow \text{tangent de l'angle de } \alpha \text{ radiants}$$

Domini = $\mathbf{R}\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi \mid k\in Z\}$
Recorregut = $\mathbf{R}$.
Periòdica de període π $\quad$ $tg(x+\pi) = tg\ x$.
Es imparell $tg(-x) = -tg\ x$
Creixent a cada interval del seu domini.
Continua a tots els reals excepte en els punts $\pi/2 \pm k\cdot\pi$ on té discontinuïtats asimptòtiques.

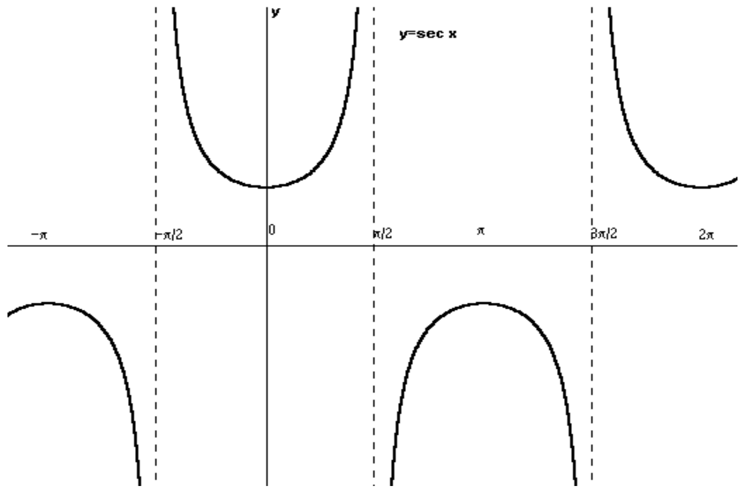


Funció secant.

$$\sec: \mathbb{R}\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi \mid k\in \mathbb{Z}\} \longrightarrow (-\infty,1] \cup [1,\infty)$$

$$\alpha \longrightarrow \text{secant de l'angle de } \alpha \text{ radiants} = \frac{1}{\cos\ \alpha}$$

Domini=R\{π/2+kπ| k∈Z}
Recorregut=(-∞,1]∪[1,∞)
Periòdica de període 2·π
Parell
Creix en el primer i quart quadrant i decreix en el segon i tercer.
Continua a tots els reals excepte en els π/2±kπ on té discontinuïtats asimptòtiques.

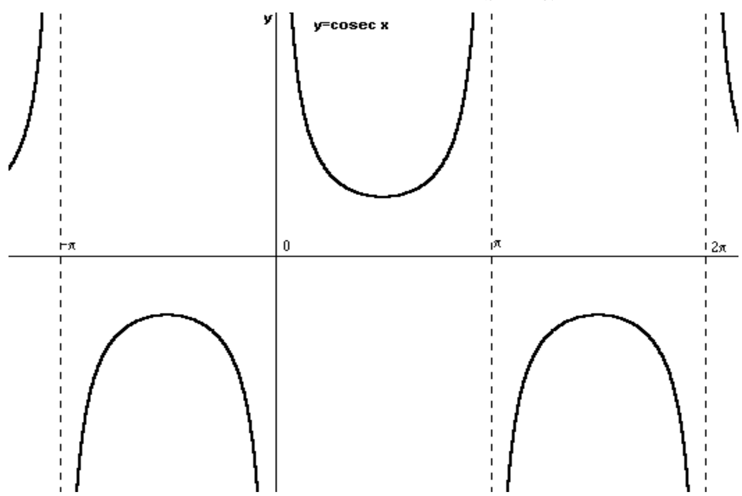


Funció cosecant.

$$\text{cosec}: \mathbb{R}\backslash\{k\cdot\pi \mid k\in \mathbb{Z}\} \longrightarrow (-\infty,1] \cup [1,\infty)$$

$$\alpha \longrightarrow \text{cosecant de l'angle de } \alpha \text{ radiants} = \frac{1}{\sin\ \alpha}$$

Domini = R\{k·π| k∈Z}
Recorregut=(-∞,1]∪[1,∞)= R\(-1,1) .
Periòdica de període 2·π
Es imparell .
Decreix en el primer i quart quadrant i creix en el segon i tercer quadrants.
Continua a tots els reals excepte en els kπ on té discontinuïtats asimptòtiques.



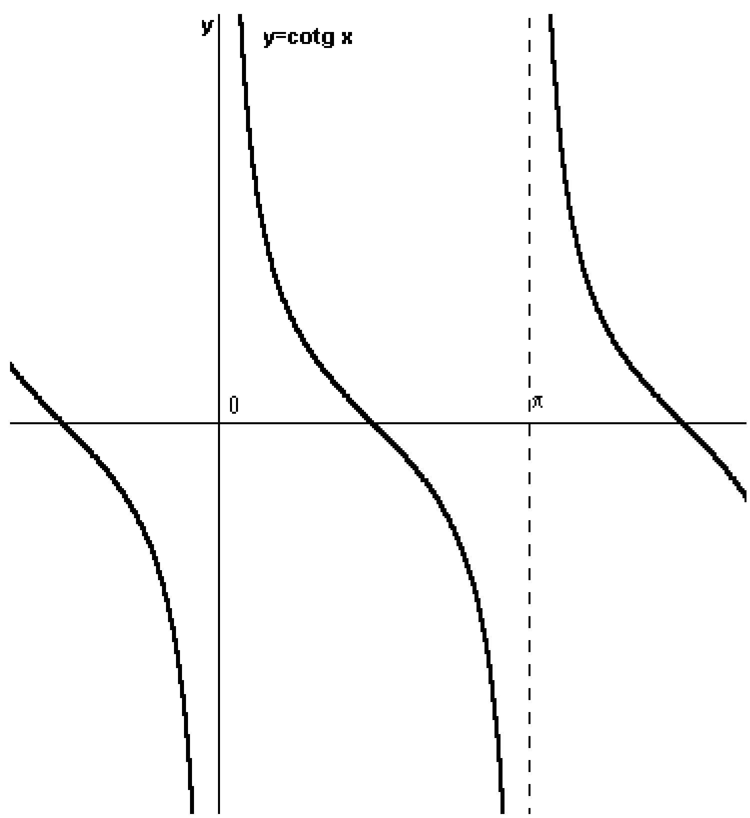
Funció cotangent

Definim la funció cotangent com una funció que a cada nombre real α, li assigna la cotangent de l'angle que té α radiants.

$$\mathbf{cotg:}\ \mathbf{R}\backslash\{k\cdot\pi \mid k\in Z\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\alpha \longrightarrow \textbf{cotangent de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Domini = $\mathbf{R}\backslash\{k\cdot\pi \mid k\in Z\}$
Recorregut = $\mathbf{R}$.
Periòdica de període π
Es imparell
Decreixent cada interval
Continua a tots els reals excepte en els punts $k\cdot\pi$ on té discontinuïtats asimptòtiques.



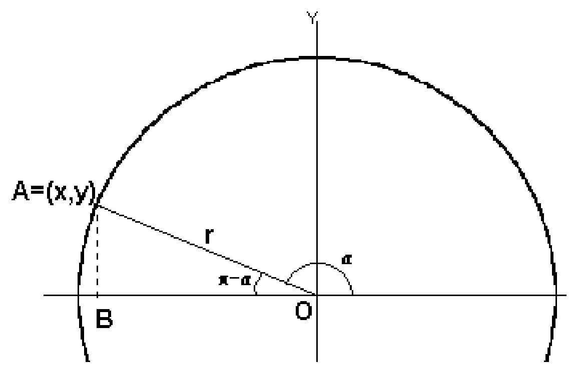
Primeres relacions entre les raons trigonomètriques.

Fórmula fonamental de la trigonometria

Per qualsevol angle α

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Ja que:
Considerem l'angle α centrat a la circumferència trigonomètrica



Si anomenem A al punt on el segon costat de l'angle talla la circumferència i B a la projecció de A sobre l'eix de les X.

Se'ns forma el triangle rectangle ABO

on $\overline{OA} = r$, $\overline{OB} = |x|$ i $\overline{AB} = |y|$

Pel teorema de Pitagoras $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2$

i substituint $r^2 = |x|^2 + |y|^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$.

Dividint el dos membres per r^2 tenim

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

Com $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ i $\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{y^2}{r^2}$ i $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{r^2}$

si ara substituint obtenim que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Conseqüència immediata de la fórmula fonamental és que:

$$\boxed{1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

ja que :
si dividim els dos membres de la fórmula fonamental per $\cos^2\alpha$, obtenim

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha}$$

ja que :
si dividim els dos membres de la fórmula fonamental per $\sin^2\alpha$, obtenim

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

però com $\dfrac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha$ i $\dfrac{1}{cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

$\Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

obtenim $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$

com $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = cotg^2\alpha$ i $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = cosec^2\alpha$

$\Rightarrow 1 + cotg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

obtenim $1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$

Exemple:

Calcular les raons trigonomètriques d'un angle α del segon quadrant, sabent que $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Per la fórmula fonamental de la trigonometria:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Com l'angle α és del segon quadrant $\Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{-\sqrt{5}} = \frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

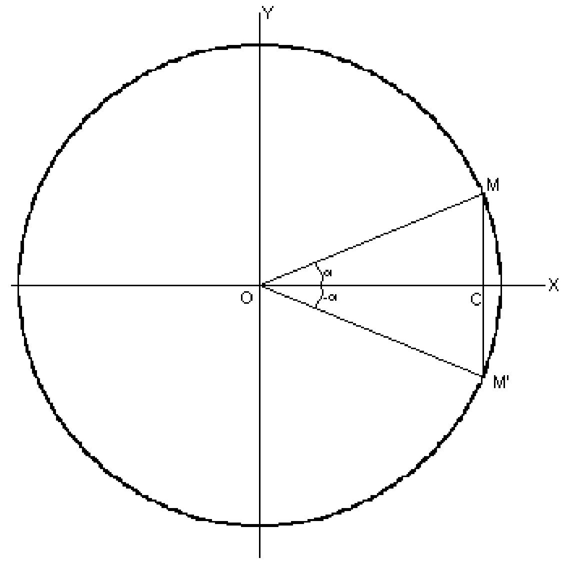
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{-\sqrt{5}} = \frac{-3\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$cosec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Raons trigonomètriques angles associats. Reducció al primer quadrant.

Angles oposats.

α i β oposats $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$



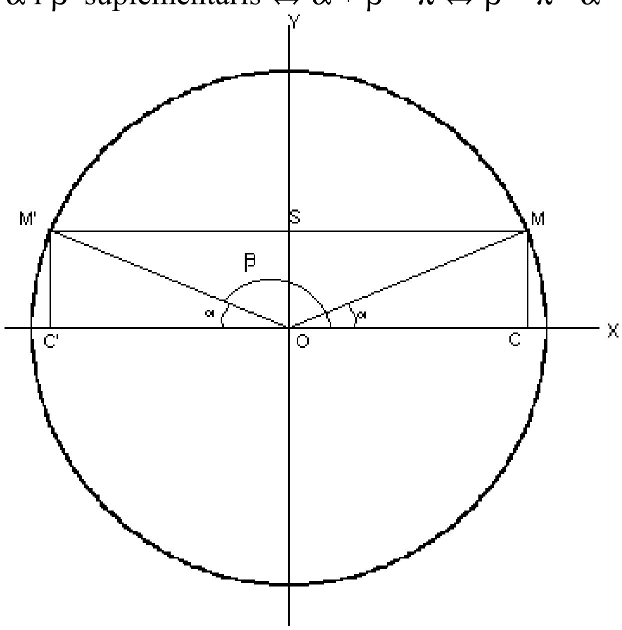
$$\sin(-\alpha) = \frac{\overline{CM'}}{r} = \frac{-\overline{CM}}{r} = -\frac{\overline{CM}}{r} = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{\overline{OC}}{r} = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

Angles suplementaris

α i β suplementaris $\Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha$



$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{C'M'}}{r} = \frac{\overline{CM}}{r} = \sin\alpha$$

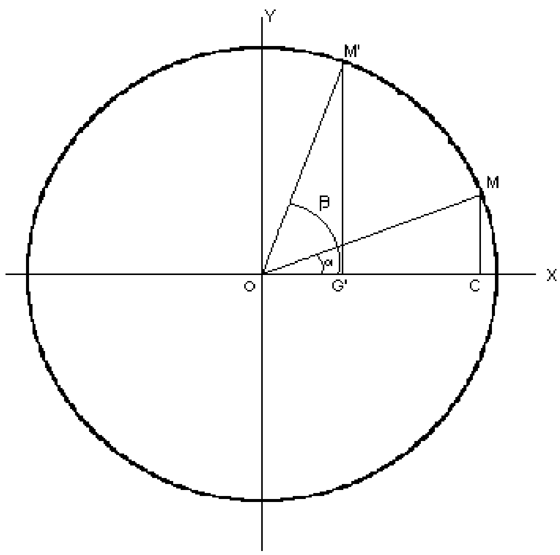
$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{C'O}}{r} = \frac{-\overline{CO}}{r} = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

Angles complementaris

α i β complementaris $\Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2 \Leftrightarrow \beta = \pi/2 - \alpha$

Observem que els triangles OM'C i OMC són semblants. i com les hipotenuses coincideix amb el radi de la circumferència, tindrem que els costats homòlegs seran iguals
$\Rightarrow \overline{MC} = \overline{OC'}$ i $\overline{M'C'} = \overline{OC}$



$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\overline{C'M'}}{r} = \frac{\overline{OC}}{r} = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\overline{C'O}}{r} = \frac{-\overline{CO}}{r} = \mathit{sin}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Angles que difereixen en π.

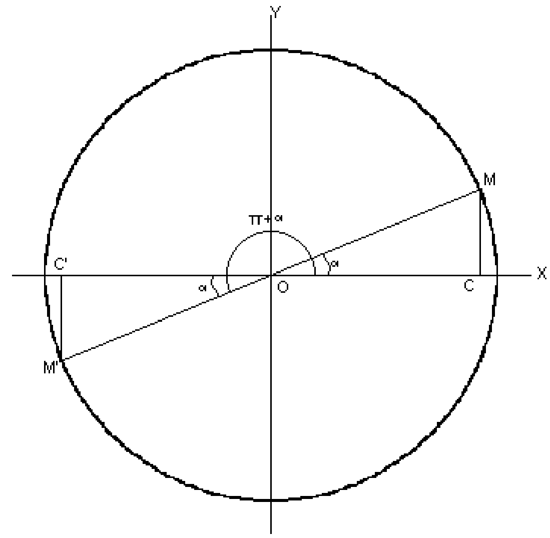
$\beta = \alpha + \pi$
És clar que OMC i OM'C' són semblants i com les dues hipotenuses coincideixen amb el radi, els costats homòlegs són iguals.

$\Rightarrow$
$\overline{C'M'} = -\overline{CM}$ i $\overline{OC'} = -\overline{OC}$

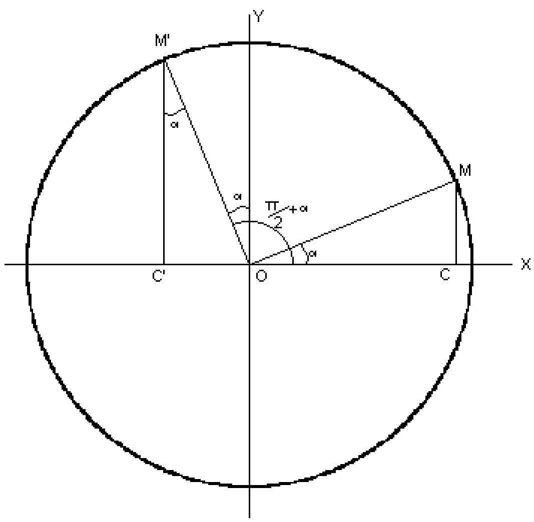
$$\sin(\alpha+\pi) = \frac{\overline{C'M'}}{r} = \frac{-\overline{CM}}{r} = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\pi) = \frac{\overline{C'O}}{r} = \frac{-\overline{CO}}{r} = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$$



Angles que difereixen en π/2.
$\beta = \alpha + \pi/2$
És clar que OMC i OM'C' són semblants i com les dues hipotenuses coincideixen amb el radi, els costats homòlegs són iguals $\Rightarrow$ $\overline{C'M'} = \overline{OC}$ i $\overline{OC'} = -\overline{MC}$



$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{\overline{C'M'}}{r} = \frac{\overline{OC}}{r} = \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{\overline{C'O}}{r} = \frac{-\overline{MC}}{r} = -\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Reducció al primer quadrant

Quan s'ha de trobar les raons trigonomètriques d'un angle α, s'acostuma a considerar un antre angle β del primer quadrant de forma que conegudes les raons trigonomètriques de β, les de α diguin automàtiques.

Llavors

si $\alpha \in$ 1r Quadrant   prenem $\beta = \alpha$

si $\alpha \in$ 2n Quadrant   prenem $\beta = \pi - \alpha$ i $\sin\alpha = \sin\beta$

$\cos \alpha = -\cos \beta$

si $\alpha \in$ 3r Quadrant prenem $\beta = \alpha - \pi$ i $\sin \alpha = -\sin \beta$

$\cos \alpha = -\cos \beta$

si $\alpha \in$ 4rt Quadrant prenem $\beta = 2\pi - \alpha$ i $\sin \alpha = -\sin \beta$

$\cos \alpha = \cos \beta$

Exemple:
Trobem les raons trigonomètriques de 1920º.
Fem la divisió entera per poder treure-li les voltes.
$\Rightarrow$ 1920º=5·360º +120º $\Rightarrow$ 1920º té les mateixes raons trigonomètriques que 120º.

$$\begin{array}{r|l} 1920 & 360 \\ \cline{2-2} 1800 & 5 \\ \hline 120 & \end{array}$$

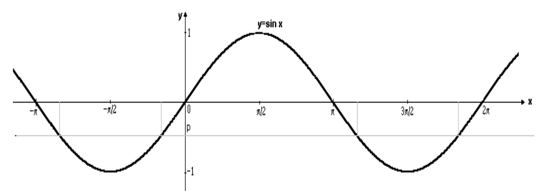
Com 180º-120º=60º $\Rightarrow$ sin1920º = sin 60º $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ i cos1920º= -cos 60º$= \frac{-1}{2}$

Les funcions circulars inverses.

arc sin

Si p és un nombre real $p \in [-1,1]$, definim arc sin p = $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \sin \alpha = p\}$.
Observeu que si α_0 és un real on $\sin \alpha_0 = p$
llavors arc sin p = $\{\alpha_0 + 2\cdot k\cdot\pi , \pi - \alpha_0 + 2\cdot k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

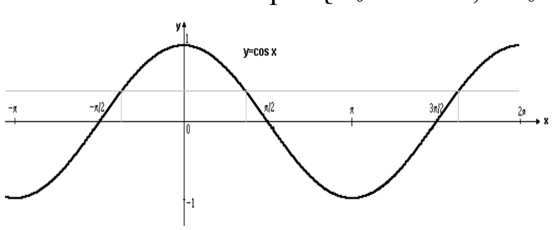
Per exemple com $\sin \frac{-\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow arcsin \frac{-1}{2} = \begin{cases} \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$



arc cos

Si p és un nombre real $p \in [-1,1]$, definim arc cos p = $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \cos \alpha = p\}$.

Observeu que si α_0 és un real on $\cos \alpha_0 = p$
llavors arc cos p = $\{\alpha_0 + 2\cdot k\cdot\pi , -\alpha_0 + 2\cdot k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$



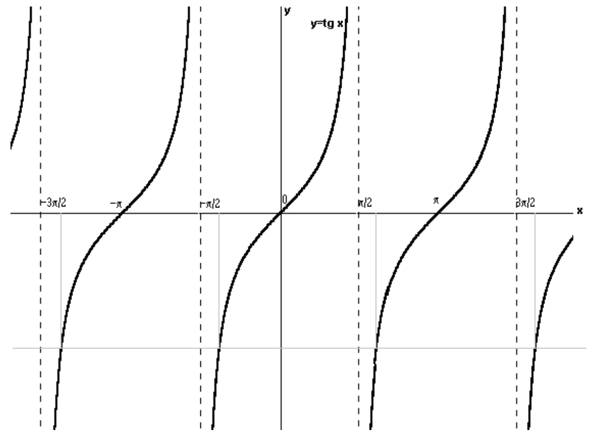
com $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \arccos \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

arc tg

Si p és un nombre real $p \in \mathbb{R}$, definim arc tg p = $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid tg\, \alpha = p\}$.

Observeu que si α_0 és un real on tg α_0 = p
llavors arc tg p = $\{\alpha_0 + k\cdot\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$

com $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1 \Rightarrow \text{arctg}\,-1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi$



Equacions trigonomètriques.

Entenem per equació trigonomètrica, a una equació on les incògnites estan sota una funció trigonomètrica. Com sempre, resoldre l'equació serà trobar tots els valors de les incògnites que substituïts a l'equació, la transformen en una igualtat certa.

exemples

resolem l'equació tg x = ctg x

com $c\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, tenim que

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}\,x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\,x = 1 \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \mathrm{tg}\,x = -1 \Rightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} .$$

La solució de l'equació és doncs $x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$.

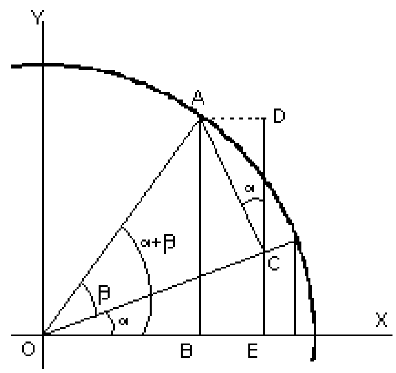
Raons trigonomètriques de la suma i deferència.

Sinus d'una suma d'angles

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

Ja que:

Considerem l'angle α centrat a la circumferència trigonomètrica, i coincidint am el segon costat de α situemi el primer costat de β. Així hem obtingut l'angle α+β, centrat a la circumferència.



Es clar que $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{DC}+\overline{CE}}{\overline{OA}} = (1)$

Com

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} \Rightarrow \overline{CE} = \overline{OC}\cdot\sin\alpha$$

i tenim que $\overline{CE} = \overline{OA}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta$.

$$\cos\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OA}\cdot\cos\beta$$

Per altra costat,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{AC}\cdot\cos\alpha$$

i amb el que $\overline{CD} = \overline{OA}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

$$\sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{OA}\cdot\sin\beta$$

Substituint a (1) obtenim

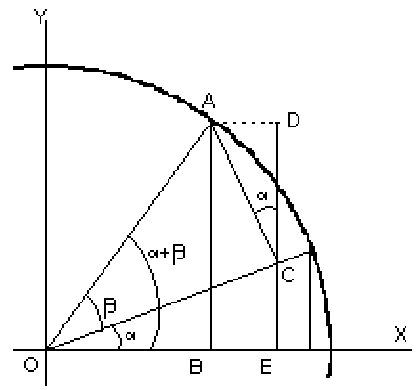
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{DC}+\overline{CE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \overline{OA}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\overline{OA}}$$

i simplificant $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Cosinus d'uns suma d'angles

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Ja que:
Considerem l'angle α centrat a la circumferència trigonomètrica, i coincidint am el segon costat de α situemi el primer costat de β. Així hem obtingut l'angle α+β, centrat a la circumferència.



Llavors $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OE}-\overline{OB}}{\overline{OA}} = (2)$

Com

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OC}} \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OC}\cdot\cos\alpha$

i $\Rightarrow \overline{OE} = \overline{OA}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OA}\cdot\cos\beta$

$\sin\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AC}\cdot\sin\alpha$

i $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{OA}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin\beta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{OA}\cdot\sin\beta$

Substituint a (2) i simplificant obtenim

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OE}-\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta - \overline{OA}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\overline{OA}} = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Tangent d'una suma d'angles

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

Ja que: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, per les propietats anteriors

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin}$$

dividint numerador i denominador per $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ obtenim:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

i simplificant

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$$

Raons trigonomètriques d'una diferència d'angles

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$

Per raonar-les es suficient observar que :

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ i $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

i substituir

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Anàlogament

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Raons trigonomètriques de l'angle doble i meitat

Raons trigonomètriques de l'angle doble

$$\boxed{\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot \sin\ \alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Ja que:

$\sin(2\cdot\alpha) = \sin(\alpha+\alpha)=$
per la fórmula del sinus d'una suma
$\sin(2\cdot\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$
com el producte de reals és commutatiu
$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$
$=2\cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(2\cdot\alpha) = \cos(\alpha+\alpha)=$
per la fórmula del cosinus d'una suma
$\cos(2\cdot\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot \sin\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Anàlogament es raona que $\boxed{\operatorname{tg}(2\cdot\alpha) = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$

Raons trigonomètriques de l'angle meitat

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Ja que:

Considerem $\beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha= 2\cdot\beta$

per la fórmula fonamental de la trigonometria $\Rightarrow 1=\sin^2\beta + \cos^2\beta$ (1)

com $\cos(2\cdot\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ (2)

Si a l'expressió (1) li restem l'expressió (2), obtenim
$2\cdot\sin^2\beta = 1- \cos(2\cdot\beta)$
com $\alpha= 2\cdot\beta$ i $\beta = \frac{\alpha}{2}$

Si a l'expressió (1) li sumem l'expressió (2), obtenim
$2\cdot\cos^2\beta = 1+ \cos(2\cdot\beta)$
com $\alpha= 2\cdot\beta$ i $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha \Rightarrow$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

i per tant $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

i per tant $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Com $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

per les fórmules anteriors

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \; .$$

Fórmules de transformació en producte.

D'una suma o diferència de sinus

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Considerem $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $b = \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \alpha=a+b$ i $\beta=a-b$

llavors $\sin\alpha = \sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$ (1)

$\sin\beta = \sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$ (2)

Sumant (1) + (2)

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin a\cdot\cos b =$

$2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Restant (1) - (2)

$\sin\alpha - \sin\beta =$

$= 2\cdot\cos a\cdot\sin b = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

D'una suma o diferència de cosinus

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Considerem $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$ i $b=\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\Rightarrow \alpha=a+b$ i $\beta=a-b$

llavors $\cos\alpha=\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$ (1)

$\cos\beta=\sin(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$ (2)

Sumant (1) + (2)

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos a\cdot\cos = =$

$2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

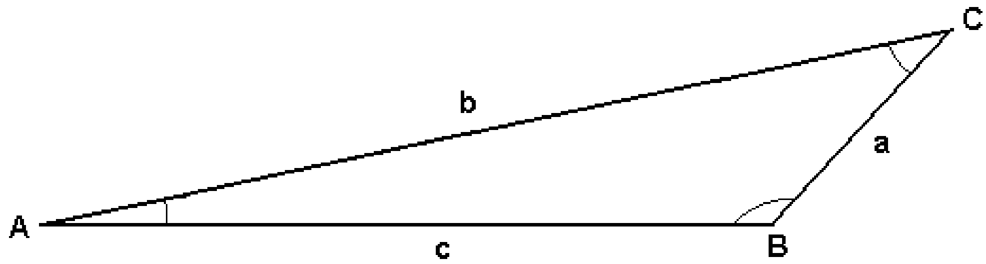
Restant (1) - (2)

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin a\cdot\sin b = =$

$-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Teorema dels sinus

Donat un triangle de vèrtexs ABC

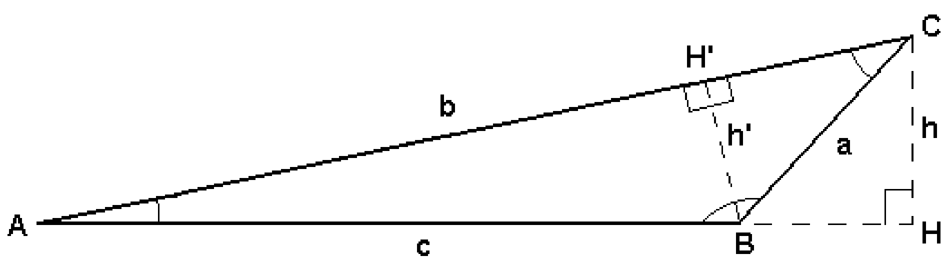


es verifica que:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Demostració:

Considerem H la projecció del vèrtex C sobre el costat AB i
H' la projecció de B sobre el costat AC.



Si ens fixem en els triangle rectangle AHC, veiem que $h = b \cdot \sin A$
i en el triangle BHC tenim que $h = a \cdot \sin(\pi - B) = a \cdot \sin B$

i per tant $b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ (1)

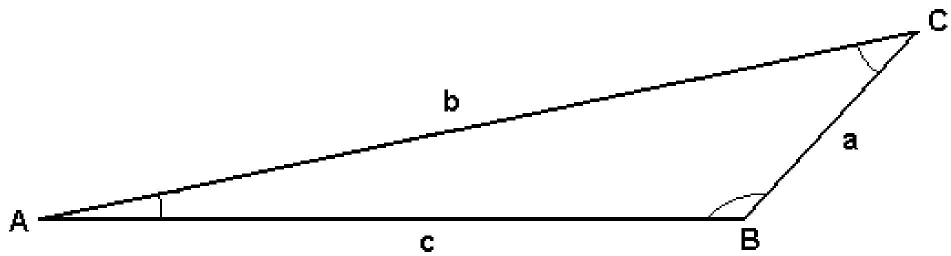
Per altra banda, del triangle rectangle CH'B, en deduïm que $h' = a \cdot \sin C$
i del tringle AH' B $h' = c \cdot \sin A$

i per tant $a \cdot \sin C = c \cdot \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ (2)

combinant (1) i (2) obtenim $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Teorema dels cosinus

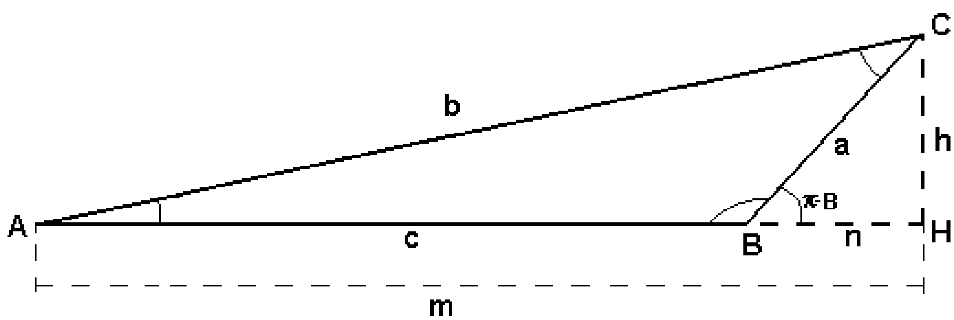
Donat el triangle de vèrtexs ABC



es verifica que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2\cdot c\cdot a\cdot \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos C$

Demostració:
Considerem h l'altura del vèrtex C sobre el costat AB i H la projecció d'aquest vèrtex, n la longitud de B a H i m la de A a H.



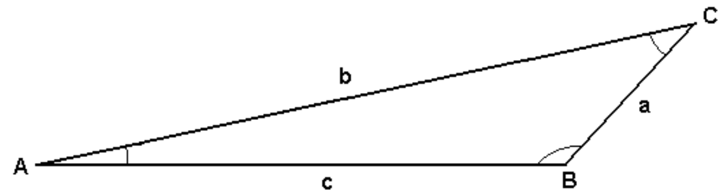
és clar que $m = c + n. \Rightarrow m^2 = (c+n)^2 = c^2 + 2\cdot c\cdot n + n^2$ (1)

Al triangle rectangle BHC tenim que pel teorema de Pitàgores $a^2=h^2+n^2$
i al tringle AHC $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$
amb el que $a^2 = b^2 - m^2 + n^2$
i per l'expressió (1)
$a^2 = b^2 - (c^2 + 2\cdot c\cdot n + n^2) + n^2 = b^2 - c^2 - 2\cdot c\cdot n - n^2 + n^2 = b^2-c^2-2\cdot c\cdot n$
i com $n = a\cdot\cos(\pi-B) = - a\cdot\cos B$
substituint $a^2 = b^2-c^2-2\cdot c\cdot(-a\cdot\cos B) = b^2 - c^2 + 2\cdot c\cdot a\cdot\cos B$.
i isolant $b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos B$.

Resolució de triangles.

Entenem per resoldre un triangle, a trobar-li la longitud dels seus costats i la mida dels tres angles.

Al igual que hem fet fins ara, designarem amb lletres minúscules , a b i c , als tres costats.
I amb la mateixa lletra majúscula, a l'angle oposat a cada costat.



Exemple1

Coneixem un costat i dos angles.
A=25º , B=40º i a = 13cms.

Com la suma dels angles interiors d'un triangle és 180º, C=180º-25º-40º =115º .

Pel teorema dels sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ tenim que :

$$\frac{13}{\sin 25} = \frac{b}{\sin 40} = \frac{c}{\sin 115} \Rightarrow b = \frac{13\sin 40}{\sin 25} = 19.77cms \text{ i } c = \frac{13\sin 115}{\sin 25} = 27.87cms$$

Per tant el triangle és a=13cm , b=19.77cm , c= 27.87cm A=25º, B=40º i C=115º .

Exemple2

Coneixem dos costats i l'angle que formen.
A=20º , b= 10mm, c = 15mm.

El costat a, el podem trobar directament amb el teorema dels cosinus.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow a^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 20º = 100 + 225 - 281.91 = 43.09 \Rightarrow$
a = 6,56mm.

Ara tenim els tres costats i podem trobar un dels angles que ens falta, amb el teorema dels cosinus.

$$\cos B = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} \Rightarrow \cos B = \frac{-100 + 43.09 + 225}{2 \cdot 6.56 \cdot 15} \Rightarrow$$

$$\cos B = \frac{-100 + 43.09 + 225}{196.8} = 0,85411$$

$\Rightarrow$ B= arc cos 0.85411 = 31,33 =31º 20' .

Com ja coneixem dos angles i la suma dels angles interiors d'un triangle és 180º, el tercer angle és C=180º-20º-31º20' = 128º 40' .

Per tant el triangle és a = 6,56mm,, b= 10mm, c = 15mm, A=20º, B=31º20', C=128º40' .

Exemple3

Coneixem els tres costats.
a=20cm, b=12cm, c=10cm.

Pel teorema dels cosinus tenim que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \Rightarrow \cos A = \frac{-20^2 + 12^2 + 10^2}{2\cdot 12\cdot 10}$$

$$\cos A = \frac{-400 + 144 + 100}{240} = -0.65 \Rightarrow$$ A=arc cos -0.65= 130.541601=130º 32' 30" .

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\cdot c\cdot a\cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \Rightarrow \cos B = \frac{10^2 + 20^2 - 12^2}{2\cdot 10\cdot 20}$$

$$\cos B = \frac{100 + 400 - 144}{400} = 0.89 \Rightarrow$$ B=arc cos 0.89= 27.126753 = 27º 7' 36" .

I l'angle el podrem trobar sabent que la suma dels angles interiors d'un triangle és 180º

C=180º - A - B =180º -130º 32' 30"- 27º 7' 36" = 22º 19' 53" .

Exemple4

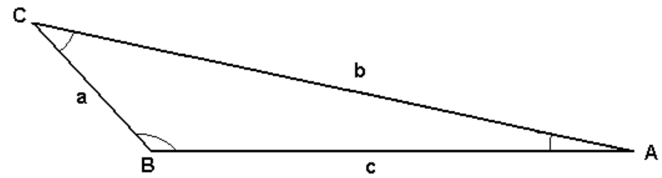
Coneixem dos costats i un angle oposat a un dels costats.
a=12m, b = 5m i A=40º .
Pel teorema dels sinus

$$\frac{12}{\sin 40} = \frac{5}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow$$

$$\sin B = \frac{5\cdot \sin 40}{12} = 0.267828 \Rightarrow$$ B=arc sin 0.267828= 15.535071º

Fórmules de Briggs i Heró.

Fórmules de Briggs.



En un triangle qualsevol, si anomenem p al seu semiperímetre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, es verifica que:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{p\cdot(p-b)}} \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

Ja que:

Pel teorema dels cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A$$

isolant cos A

$$\cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$$

Com

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

substituint

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}}{1+\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}}}$$

si operem i simplifiquem

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2bc-a^2+b^2+c^2}}$$

com $(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{-a^2+(b+c)^2}}$$

com una diferència de quadrats és la suma per la diferència

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+(b-c))\cdot(a-(b-c))}{(a+(b+c))\cdot(-a+(b+c))}}$$

com $a + b + c = 2p$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(2\cdot p-2\cdot c)\cdot(2\cdot p-2\cdot b)}{2\cdot p\cdot(2\cdot p-2\cdot a)}}$$

i finalment, simplificant

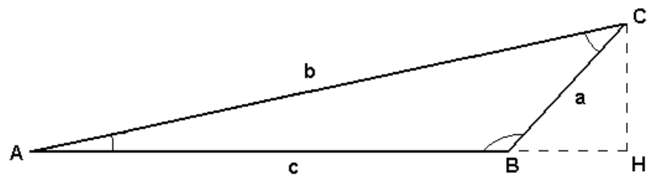
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-a)}} \ .$$

Fórmula d'Heró

Si p és el semiperimetre d'un triangle, la seva superfície és:

$$\boxed{S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

Ja que :
Considerem el triangle



És clar que la seva superfície és.
$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\overline{HC}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin A=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\frac{2A}{2}$$

Pe la fórmula de l'angle doble
$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\frac{2A}{2}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot 2\cdot \sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=c\cdot b\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\qquad(1)$$

Com $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ i $\cos A=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$, tenim que

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2bc-a^2+b^2+c^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{2p(2p-2a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ .$$

Anàlogament
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ .$$

I per tant substituint a (1)
$$S=c\cdot b\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ .$$

I finalment operant
$$S=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\ .$$