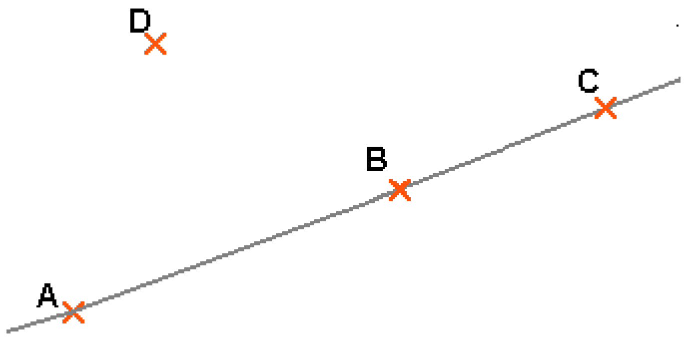
CONCEPTE DE RECTA

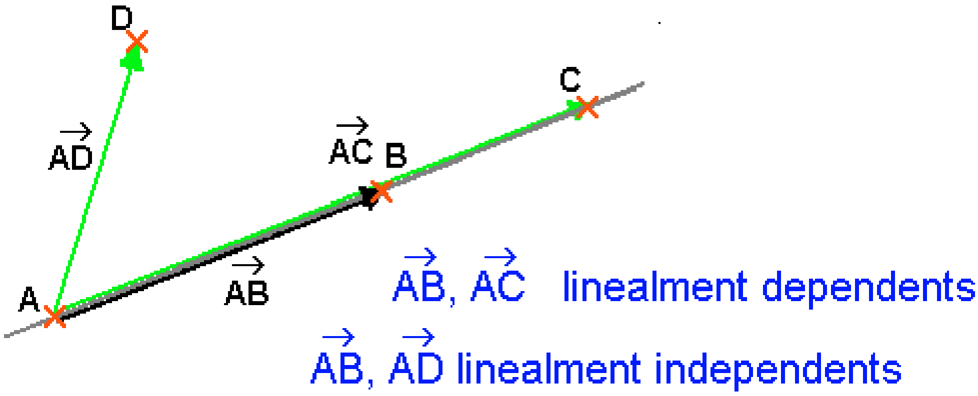
PUNTS ALINEATS

Abans de donar el concepte de recta, ens qüestionarem quan tres punts són alineats.

En aquest gràfic veiem clarament que ABC són alineats, mentre que ABD no ho són.



Si ens fixem amb els vectors que tenen l'origen en el punt A, observem que:



Per això, donats tres punts A, B, C, diem que

A,B i C són alineats $\Leftrightarrow$ **els vectors** $\overrightarrow{AB}$ **i** $\overrightarrow{AC}$ **són linealment dependents** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ **i** $\overrightarrow{AC}$ **són proporcionals.**

EQUACIONS VECTORIAL I PARAMÈTRICA

Donats A i B són dos punts diferents, entendrem per
recta que passa per A i B tots els punts X de manera que A, B, X són alineats

per tant $X \in r_{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

És a dir: si $A=(a_1,a_2)$ i $B=(b_1,b_2)$ $A \neq B$, la recta que passa per A i B és formada pels (x, y) que compleixen:

$$(x-a_1, y-a_2) = \lambda(b_1-a_1, b_2-a_2) \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

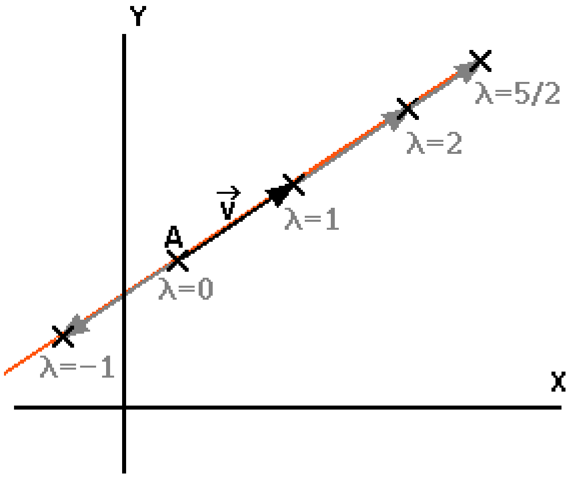
és a dir r_{AB} : $(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(b_1-a_1,b_2-a_2)$ $\lambda \in \mathbf{R}$

Del vector $\overrightarrow{AB}$ se'n diu **vector director** de la recta i no pot ésser nul.

Fixant-nos només en un punt A=(a_1,a_2) de la recta i en el vector $\vec{v}=(v_1,v_2)\neq\vec{0}$, definim la **la recta que passa per A i té la direcció de** $\vec{v}$ com:

r: $(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(v_1,v_2)\ \lambda\in\mathbf{R}$

que coneixem amb el nom **d'equació vectorial** r.



Per decidir si un punt (x_0, y_0) és de la recta, en hi ha prou en comprovar si existeix una λ_0 de manera que

$$(x_0, y_0) = (a_1,a_2) + \lambda_0(v_1,v_2)$$

Observeu que del vector $\vec{v}$, sols ens interessa la seva direcció, i que el podem substituir per qualsevol altre vector proporcional a $\vec{v}$.

Si ho expressem component a component, obtenim l'**equació paramètrica**:

$$r:\ \begin{cases} x = a_1 + \lambda\, v_1 \\ y = a_2 + \lambda\, v_2 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbf{R} \qquad (1)$$

i un punt $(x_0, y_0) \in r \Leftrightarrow \exists\lambda_0 \in \mathbf{R}$ de manera que $\begin{cases} x_0 = a_1 + \lambda_0\, v_1 \\ y_0 = a_2 + \lambda_0\, v_2 \end{cases}$

Exemple:

Considerem la recta r, que passa pel punt (1,-3) i té la direcció del vector $\vec{v}=(-1, 2)$.

La seva equació **vectorial** és r : $(x,y) = (1, -3) + \lambda\,(-1, 2)$ amb $\lambda\in\mathbf{R}$

Expressada en l'equació **paramètrica** és r : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$.

Mirem si el punt (1, 2) és de r. $\begin{cases} 1 = 1-\lambda & \Rightarrow \lambda = 0 \\ 2 = -3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 5/2 \end{cases}$

com λ no pot ser alhora 0 i 5/2, tenim que $\Rightarrow (1, 2) \notin r$

Mirem si el punt (-1, 1) és de r. $\begin{cases} -1 = 1-\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \\ 1 = -3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$

com existeix $\lambda=2$ que fa vàlid el sistema, tenim que $(-1, 1)\in r$

EQUACIÓ CONTÍNUA.

Si isolem λ de cada una de les equacions del sistema (1), obtenim:

$\lambda = \dfrac{x - a_1}{v_1}$ i $\lambda = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ igualant les λ, obtenim r: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \lambda$

que en coneix com **equació contínua** de r:

Observem que un punt $(x_0, y_0) \in r \iff \dfrac{x_0 - a_1}{v_1} = \dfrac{y_0 - a_2}{v_2}$.

Si l'expressem a partir de dos punts $A \neq B$, la recta és $r_{AB}: \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2}$

Exemples:

- L'equació contínua de la recta que passa pel punt (1,-3) i té la direcció $\vec{v}=(-1, 2)$ és $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 3}{2}$

- L'equació contínua de la recta que passa per (1, 2) i (2, -4) és
  r: $\dfrac{x - 1}{2-1} = \dfrac{y - 2}{-4-2} \Rightarrow$ r : $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{-6}$

- L'equació contínua de la recta que passa per (1,-3) i té la direcció de $\vec{v}=(0, 2)$
  és $\dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y + 3}{2}$
  on apareix un denominador nul; en aquest cas, no té sentit parlar de l'equació contínua. Tot i així hi ha vegades que l'utilitzem sobreentenent que quan posem o al denominador, el seu numerador també és 0.

EQUACIÓ DE PUNT PENDENT

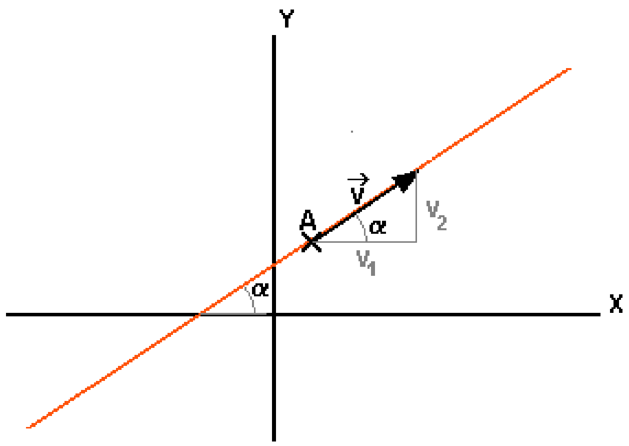
Considerem la recta que passa per $A=(a_1,a_2)$ i té la direcció $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$

operant

r: $y - a_2 = \dfrac{v_2}{v_1}(x - a_1)$

expressió que sols té sentit si $v_1 \neq 0$



Del quocient $\frac{v_2}{v_1}$ =m és el **pendent** de la recta ja que com mostra el gràfic, coincideix amb la tag α que és l'angle que forma la recta amb l'eix OX.

Per això de l'equació r: $y - a_2 = m(x - a_1)$ en diem en forma de **punt pendent**.

Observeu que si una recta té pendent m , el seu vector director és proporcional a (1,m).

Exemples

- L'equació de la recta r que passa pel punt (1,-3) i té la direcció $\vec{v}$=(-1, 2) és
  $\Rightarrow$ r: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2}$ $\Rightarrow$ r: 2(x-1)=-(y+3) $\Rightarrow$ r: y+3=-2(x-1).
  El seu pendent és -2.

- Trobem l'equació d'una recta s que passa per (2,-2) i forma un angle de $\pi/3$ amb l'eix OX .
  Com s passa per (2,-2)$\Rightarrow$ s: y+2 = m(x-2)
  m = pendent = tag $\pi/3 = \sqrt{3}$
  Per tant s: y+2 = $\sqrt{3}$ (x-2)
  i el seu vector director és el $(1,\sqrt{3})$.

EQUACIÓ GENERAL

Considerem la recta que passa per (a_1,a_2) i té la direcció (v_1,v_2), $\Rightarrow$ la seva equació contínua és r: $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$

operant r: $v_2(x - a_1)= v_1 (y - a_2) \Rightarrow v_2x - v_2 a_1= v_1y - v_1a_2 \Rightarrow v_2x - v_2 a_1 - v_1y + v_1a_2 = 0$
$\Rightarrow$ r: $v_2x - v_1y - v_2 a_1 + v_1a_2 =0$; expressió que té la forma

r: $\mathbf{A\cdot x + B\cdot y + C = 0}$ on $A= v_2$, $B=- v_1$ i $C=- v_2 a_1 + v_1a_2$

i que en diem **equació general** de la recta; i un punt $(x_0,y_0)\in r \Leftrightarrow$: $A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C = 0$.

Observeu que, si a partir de l'equació general volem trobar la vectorial, en hi ha prou en donar un valor qualsevol a x per obtenir un punt, i prendre $\vec{v}$=(-B,A).

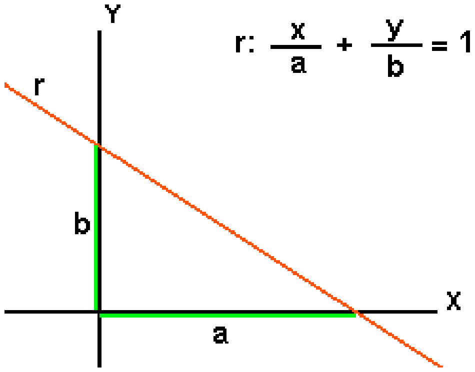
Exemples:

- Trobem l'equació de la recta que passant per (1,-3), té la direcció$\vec{v}$=(-1, 2)
  La seva equació contínua és r: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2}$;
  operant r: 2(x-1)=-(y+3) $\Rightarrow$ r: 2x-2=-y-3
  i per tant la seva equació general és r: 2x + y +1=0

- Trobem l'equació d'una recta s que passa per (1,-1) i té la direcció (3,2).
  Està clar que ho podem trobar com a l'exemple anterior, ho farem però d'un altra forma:
  s té la direcció (3,2) $\Rightarrow$ s:-2x + 3y + C=0;
  si passa per (1,-1)$\Rightarrow$ $-2\cdot1 + 3\cdot(-1) + C = 0 \Rightarrow -2 -3 + C=0 \Rightarrow -5 + C = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow C=5$
  Amb el que la recta buscada és s: $-2x + 3y + 5 = 0$.

EQUACIÓ SEGMENTARIA

Si una recta talla als eixos en dos punts diferents (a,0) i (0,b), la seva equació és $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ que es coneix com a **equació segmentàri,** al ser a i b les longituds dels segments que formats per la recta i els eixos.



si r passa per (a,0) i (0,b) $\Rightarrow$ r: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$

operant $\Rightarrow$ r: $\frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b} \Rightarrow$ r: $1=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$.

POSICIO RELATIVA

Ens platejarem ara com poden estar situades dues rectes del pla.
La primera qüestió que mirarem és si tenen o no punts comuns; quan hem vist l'equació general d'una recta r: Ax + By + C = 0 , hem observat que

$$(x_0,y_0)\in r \Leftrightarrow A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C = 0 .$$

Llavors si tenim dues restes del pla **r**: Ax + By + C = 0 i **s**: A'x + B'y + C' = 0, els punts que tenien en comú, són els que verifiques alhora les dues equacions, és a dir:
$(x_0,y_0)\in \mathbf{r} \cap \mathbf{s} \Leftrightarrow A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C = 0$ i $A'x_0 + B'y_0 + C' = 0$
o el que és el mateix:

$$(x_0,y_0)\in \mathbf{r}\cap\mathbf{s} \Leftrightarrow (x_0,y_0) \text{ és solució del sistema } \begin{cases} A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C = 0 \\ A'x_0 + B'y_0 + C' = 0 \end{cases}$$

Plantegem-nos doncs resoldre el sistema $\begin{cases} A\cdot x + B\cdot y + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$

Suposant $A'\neq0$ (si fos 0 faríem el raonament amb B') restant a la primera equació $\frac{A}{A'}$ vegades la segona $\begin{cases} (A - \frac{A}{A'}A')x + (B - \frac{A}{A'}B')y + C - \frac{A}{A'}C' = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (B - \frac{A}{A'}B')y + C - \frac{A}{A'}C' = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (B - \frac{A}{A'}B')y = -C + \frac{A}{A'}C' \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$.

On se'ns plantegen dues opcions $B - \frac{A}{A'}B' = 0$ i $B - \frac{A}{A'}B' \neq 0$.

- Si $B - \frac{A}{A'}B' \neq 0$, podem isolar y a la primera equació ,

  obtenint $\begin{cases} y = \dfrac{-C + \frac{A}{A'}C'}{B - \frac{A}{A'}B'} \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ i per tant $\begin{cases} y = \dfrac{-C + \frac{A}{A'}C'}{B - \frac{A}{A'}B'} \\ x' = \dfrac{-B'\dfrac{-C + \frac{A}{A'}C'}{B - \frac{A}{A'}B} - C'}{A'} \end{cases}$ .que té un

  únic (x,y) solució del sistema; llavors i diem que **r** i **s** es **tallen** en un punt.

- Si $B - \frac{A}{A'}B' = 0$ i tenim que el sistema és $\begin{cases} 0y = -C + \frac{A}{A'}C' \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ és a dir

  $\begin{cases} 0 = -C + \frac{A}{A'}C' \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$.

  on també es poden donar dues opcions que $-C + \frac{A}{A'}C' \neq 0$ o $-C + \frac{A}{A'}C' = 0$

  - Si $-C + \frac{A}{A'}C' = 0$ el sistema queda

    $\begin{cases} 0 = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases} \Rightarrow A'x + B'y + C' = 0 \Rightarrow$ qualsevol punt de la

    recta **s** és solució del sistema $\Rightarrow$ **r** = **s** .

- Si $-C+\frac{A}{A'}C'\neq 0$, com el sistema és $\begin{cases} 0=-C+\frac{A}{A'}C' \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$ on la primera equació queda alhora igual a 0 i diferent de 0 $\Rightarrow$ mai té solució $\Rightarrow$ **r** i **s** no tenen cap punt en comú i diem que són **paral·leles** $\Leftrightarrow$ **r || s** .

Algunes observacions sobre aquestes condicions

$B-\frac{A}{A'}B'=0 \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \Leftrightarrow \frac{B}{A}=\frac{B'}{A'} \Leftrightarrow$ m = m' .$\Leftrightarrow$ (-B,A) i (-B',A,) són proporcionals

$\Leftrightarrow$ els vectors directors de r i s són proporcionals $\vec{v}_r = k\ \vec{v}_s$

i que $-C+\frac{A}{A'}C'=0 \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}$

En resum tenim que:

Si $B-\frac{A}{A'}B'\neq 0$	$\frac{B}{A}\neq\frac{B'}{A'}$	$\vec{v}_r \neq k\ \vec{v}_s$	$m\neq m'$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$	**r i s es tallen en un punt**, que és la solució del sistema format per les equacions de les dues rectes.

Si $B-\frac{A}{A'}B=0$	$\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}$	$\vec{v}_r = k\ \vec{v}_s$	$m=m'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$	
		$-C+\frac{A}{A'}C'\neq 0$		$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$	**r i s paral·leles r || s**
		$-C+\frac{A}{A'}C'=0$		$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$	**r = s**

Exemple

Considerem les rectes r: -x + 4y = 1 i s: 2x + α y = β, estudiem la seva posició relativa en funció dels paràmetres α i β.

Ens qüestionem en primer lloc quan $\frac{-1}{2}=\frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=-8$.

Per tant tindrem que

Si $\alpha\neq-8$ r i s es tallen en un punt.

Si $\alpha=-8$ r i s són iguals o paral·leles, com $\frac{-1}{2}=\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta=-2$.

Ens trobem doncs amb les següents opcions:

$\alpha\neq-8$ i β qualsevol $\Rightarrow$ r i s es tallen en un punt

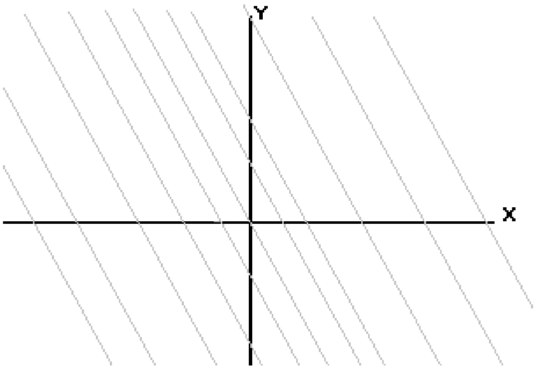
$\alpha=-8$ i $\beta\neq-2 \Rightarrow$ r i s paral·leles

$\alpha=-8$ i $\beta=-2 \Rightarrow$ r = s

FEIX DE RECTES

FEIX DE RECTES PARAL·LELES

El feix de rectes paral·leles, és el conjunt de totes les rectes que són paral·leles entre elles.



Com la condició de paral·lelisme és $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, si tenim una recta

r: Ax + By + C=0, el feix de rectes paral·leles a r és $Ax + By + \lambda = 0$ amb $\lambda \in \mathbf{R}$.

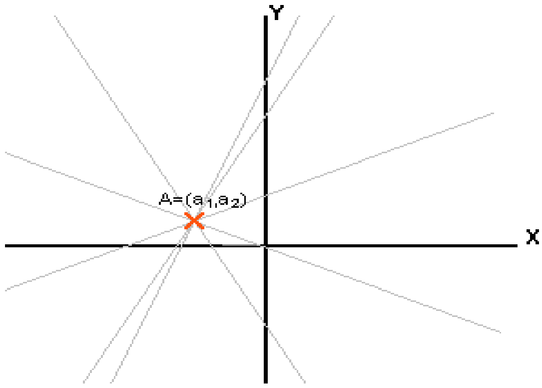
Exemple

Trobem la paral·lela a $2x - 3y + 4 = 0$, que passa pel punt (-1,3) .
Si **r**:$2x - 3y + 4 = 0$, el feix de rectes paral·leles a r és $2x-3y+C=0$, amb $C \in \mathbf{R}$.
Busquem doncs una recta **s**: $2x-3y+C=0$
com $(-1,3) \in s \Rightarrow 2\cdot(-1) - 3\cdot(3) + C = 0 \Rightarrow C=11$; amb el que **s**: $2x - 3y + 11 = 0$.

FEIX DE RECTES QUE PASSEN PER UN PUNT

Fixat un punt $A=(a_1,a_2)$ entenem per feix de rectes de vèrtex (a_1,a_2), al conjunt format per totes les rectes que passen per (a_1,a_2) . Utilitzant l'equació en forma de punt pendent, veiem que els feix de rectes que passen per (a_1,a_2), és:

$$\begin{cases} y-a_2 = \lambda(x-a_1) & \lambda \in \mathbf{R} \\ x=a_1 \end{cases}$$



ANGLES I DISTANCIES

RECTES PERPENDICULARS

Donades les rectes **r** i **s**

$$r: \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \qquad i \quad s: \frac{x - b_1}{w_1} = \frac{y - b_2}{w_2}$$

diem que: **r i s són perpendiculars** $\Leftrightarrow$ **r⊥s** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **els seus vectors directors són perpendiculars** $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0}$

Observeu que:

- Si m_r i m_s són els pendents de r i s,

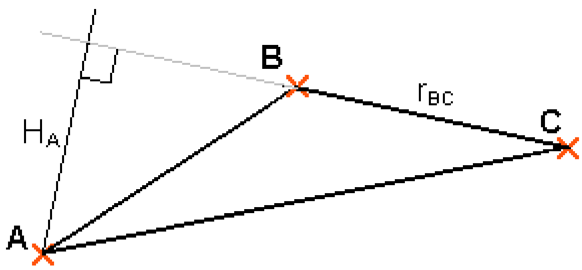
  $r \perp s \Leftrightarrow v_1 w_1 = -v_2 w_2 \Leftrightarrow -1 = \frac{v_2\, w_2}{v_1\, w_1} \Leftrightarrow -1 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{w_2}{w_1} \Leftrightarrow$ $\mathbf{m_r \cdot m_s = -1}$

- si **r**:Ax + By + C = 0, la recta **s**: Bx - Ay + D = 0 és perpendicular a **r** , ja que $\vec{v}$=(-B,A) i $\vec{w}$=(-(-A),B)=(A,B)
  $\vec{v} \cdot \vec{w}$=(-B,A) (A,B)=-BA + AB = 0.

Exemple:

Si tenim el triangle de vèrtexs A=(2,1), B=(1,2) i C=(3,3), quina és l'equació de la seva altura des de el vèrtex A?

L'altura des de vèrtex A , és una recta perpendicular al costat BC, que passa per A.



Trobem el costat BC:

Utilitzant l'equació de la recta que passa per 2 punts $r_{BC}: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{3-2} \Rightarrow$

r_{BC}:x-1=2y-4 $\Rightarrow$ r_{BC}:x-2y+3=0.

Si anomenem H_A a l'altura des de A, tenim que $H_A \perp r_{BC}$ i $A \in H_A$

$H_A \perp r_{BC} \Rightarrow H_A$: 2x+y+C=0

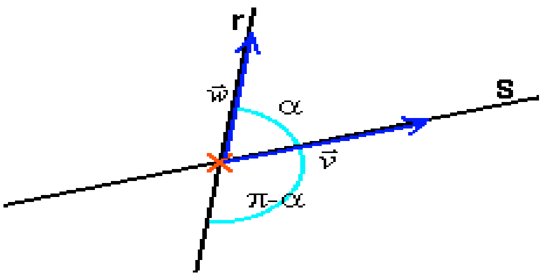
$A \in H_A \Rightarrow 2 \cdot 2+1+C=0 \Rightarrow C=-5$

Per tant l'altura des de A és H_A: 2x + y - 5 = 0.

ANGLE ENTRE DUES RECTES

Donades les rectes

r: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ s: $\dfrac{x - b_1}{w_1} = \dfrac{y - b_2}{w_2}$



definim l'angle entre r i s , com l'angle que formen els seus vectors directors o el suplementari d'aquest angle (acostumem a donar sempre el que està entre 0 i π/2).

Per tant:

$$\cos(r,s) = \left| \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} \right| = \left| \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v^2_1+v^2_2}\sqrt{w^2_1+w^2_2}} \right|.$$

Exemple:

- Trobem l'equació de les ectes que passen per (2-5) i formen un angle de π/4 amb la recta r: 6x+4y-5=0.

  Estem buscant una recta s que passa per (2, -5) ⇒ s: y+5=m(x-2) amb m∈**R**.
  Observem també que $\vec{v}_s = (1,m)$ i $\vec{v}_r = (-4,6) = (-2,3)$

  Com formen un angle de π/4 ⇒ $\cos\frac{\pi}{4} = \left|\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{\|\vec{v}_r\|\cdot\|\vec{v}_s\|}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{(-2,3)\cdot(1,m)}{\|(-2,3)\|\cdot\|(1,m)\|}\right| \Rightarrow$

  $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{-2+3m}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2}}\right|$$

  Elevant els dos membres de l'equació al quadrat

  $$\frac{1}{2} = \frac{(-2+3m)^2}{13\cdot(1+m^2)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4-12m+9m^2}{13+13m^2)} \Rightarrow 13+13m^2=8-24m+18m^2 \Rightarrow$$

  $\Rightarrow 5m^2 -24m -5 = 0.$

  Resolent l'equació de 2n grau $m = \dfrac{24 \pm \sqrt{576+100}}{10} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ -1/5 \end{array}\right.$.

  Hi ha doncs dues rectes que passen per (2,-5) i formen un angle π/4 amb r,
  s_1 : y+5=5(x-2) ⇒ 5x - y - 15 = 0
  s_2 : y+5=-1/5 (x-2) ⇒x + 5y -23 = 0

DISTANCIA PUNT-RECTA

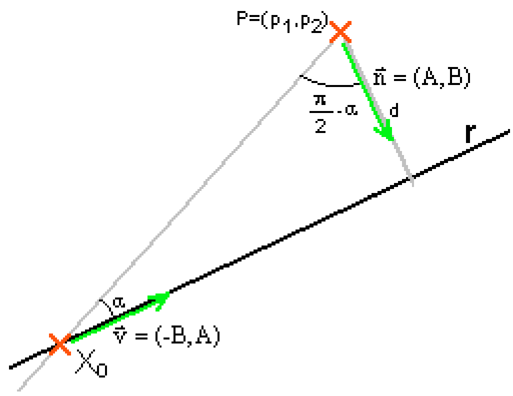
Donat el punt $P=(p_1,p_2)$ i la recta $r: Ax+By+C=0 \Rightarrow d(P,r)=\left|\frac{Ap_1+Bp_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

Ja que:

Si X_0 és un punt qualsevol de r, tenim que

$d(P,r)= d = \left\|\overrightarrow{PX_0}\right\| \cdot |\sin\alpha| = \left\|\overrightarrow{PX_0}\right\| \, |\cos(\pi/2-\alpha)|$ (1)

on α és l'angle que formen $\overrightarrow{PX}$ i $\vec{v}$



Si anomenem $\vec{n}=(A,B)$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ i $\vec{n}$ són perpendiculars i per tant

$$\cos(\pi/2-\alpha)=\left|\frac{\overrightarrow{PX_0}\cdot\vec{n}}{\left\|\overrightarrow{PX_0}\right\|\cdot\|\vec{n}\|}\right|$$

substituint a (1) :

$$d(P,r)= \left|\overrightarrow{PX_0}\right|\left|\frac{\overrightarrow{PX_0}\cdot\vec{n}}{\left\|\overrightarrow{PX_0}\right\|\cdot\|\vec{n}\|}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{PX_0}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \left|\frac{(p_1-x_0,p_2-y_0)\cdot(A,B)}{\|(A,B)\|}\right| = \left|\frac{Ap_1-Ax_0+Bp_2-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Com el punt X_0 és de la recta, $Ax_0+By_0+C=0 \Rightarrow -Ax_0-By_0=C$

$$d(P,r)=\left|\frac{Ap_1+Bp_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| .$$

Exemple:

- Considerem la recta $3x-4y+C=0$ i el punt $P=(-2,3)$, trobem els valors de C, si la distància de C a r és de 5 unitats.

  Com $d(P,r)=\left|\frac{Ap_1+Bp_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \Rightarrow \left|\frac{3(-2)-4\cdot 3+C}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right| = 5 \Rightarrow \left|\frac{-6-12+C}{\sqrt{9+16}}\right| = 5 \Rightarrow$

  $\left|\frac{-18+C}{5}\right| = 5 \Rightarrow -18+C=\pm 25 \Rightarrow C=\pm 25+18=\left\langle\begin{matrix}43\\-7\end{matrix}\right.$.

- Calcularem l'àrea del triangle de vèrtexs $A=(1,-1)$, $B=(5,3)$ i $C=(4,0)$

  Prenent com a base el costat AB, tenim que la longitud de la base b és

  $b=d(A,B)=\sqrt{(5-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

L'altura corresponent a aquesta base és la distància de C a la recta AB $\Rightarrow$ h=d(C,r_{AB})

trobant r_{AB}: $\frac{x-5}{1-5} = \frac{y-3}{-1-3}$ $\Rightarrow$ r_{AB}: x-y-2=0

Llavors h=d(C,r_{AB})=$\left|\frac{4-0-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \sqrt{2}$.

Per tant l'àrea del triangle és $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\ u^2$.

DISTANCIA RECTA-RECTA

Per poder trobar la distància entre dues rectes **r** i **s**, cal en primer lloc veure quina és la seva posició relativa i llavors

- Si **r** i **s** es tallen la distància d(r,s) = 0
- Si **r** $||$ **s** $\Rightarrow$ d(r,s)=d(P,s) essent P un punt qualsevol de r.

BARICENTRE D'UN TRIANGLE.
Donat el triangle de vèrtex A, B i C él seu baricentre és:

$$Bar=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

Justificació:
N'hi ha prou de veure que aquest punt pertany a les medianes, rectes que van d'un vèrtex al punt mitjà del costat oposat.

La mediana M_C ,mediana des del vèrtex C, és la recta que passa per C i pel punt mitjà del costat A i B.

Com que el punt mitjà entre A i B és : $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

$$M_C : \frac{x - c_1}{\frac{a_1+b_1}{2} - c_1} = \frac{y - c_2}{\frac{a_2+b_2}{2} - c_2}$$

i operant: $$M_C : \frac{x - c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{y - c_2}{a_2+b_2 -2c_2}$$

Si substituint el punt Bar a l'equació de la recta M_C , tenim que:

$$\frac{\frac{a_1+b_1+c_1}{3} - c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{\frac{a_2+b_2+c_2}{3} - c_2}{a_2+b_2 -2c_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+b_1+c_1 -3c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{a_2+b_2+c_2 -3c_2}{a_2+b_2 -2c_2}$$

igualtat que és evidentment certa $\Rightarrow Bar \in M_C$.

De manera anàloga podem demostrar que $Bar\in M_A$ i $Bar\in M_B \Rightarrow$ aquest punt és a les tres medianes $\Rightarrow$ és la intersecció de les medianes $\Rightarrow$ és el baricentre de A B C.