PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

Entenem per progressió aritmètica a aquelles successions on cada terme s'obté del seu anterior sumant-li una constant **d** anomenada diferència.
és a dir: $\mathbf{a_n = a_{n-1} + d}$
com $a_n = a_{n-1}+d = a_{n-2}+2\cdot d = a_{n-3}+3\cdot d = ... = a_1+(n-1)\cdot d$
tenim que per trobar el terme n podem utilitzar l'expressió $\mathbf{a_n = a_1+(n-1)\cdot d}$ que anomenem terme general
per exemple la progressió aritmètica de primer terme –7 i diferència 3 té com a primers termes $a_1=-7$, $a_2=-4$, $a_3=-1$, $a_4= 2$, $a_5= 5$
si ara volem trebar el terme 6è sols hem de fer que $a_6 = -7 + (6-1)\cdot 3 = 8$.

Suma de termes equidistants dels extrems

Quan considerem els n primers termes d'una progressió aritmètica i considerem a_1 i a_n com els extrems, resulta que $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n$
És a dir:
La suma de termes equidistants dels extrems d'una progressió aritmètica és constant.

ja que:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + (1+k-1)\cdot d + a_1 + (n-k-1)\cdot d = a_1 + a_1 + (1+k-1+n-k-1)\cdot d =$$
$$= a_1 + a_1+(n-1)\cdot d= a_1 + a_n$$

Suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica.

$$a_1 + a_2 + ...+ a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

ja que:

Si anomenen S a aquesta suma $S = a_1 + a_2 +...+ a_{n-1} + a_n$
per la commutabilitat de la suma de reals $S = a_n + a_{n-1}+...+ a_2 + a_1$
i sumant terme a terme
$2\cdot S = a_1 + a_n + a_2 + a_{n-1} + a_3 + a_{n-2} + ...+ a_{n-2}+ a_3 + a_{n-1} + a_2 + a_n + a_1$
com la suma de termes equidistants dels extrems és igual
$2\cdot S = (a_1 + a_n)\cdot n$ i per tant
$$S = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2} .$$

Eemples:

Quantes campanades fa un rellotge cada dia, si sols toca a les hores?

El número de campanades que sonen en un dia és 1, 2, 3,...,11,12, 1, 2,...,11, 12.
Es clar que segueix una progressió aritmètica de primer terme 1, de darrer terme 12 i diferència 1 que es repeteix dos cops al dia.
Per tant Núm Campanades = $2\cdot(1 + 12)\cdot\frac{12}{2} = 13\cdot 12 = 156$.

PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Entenem per progressió **geomètrica** a aquelles successions on cada terme s'obté del seu anterior multiplicant-lo per una constant fixa **r** anomenada raó.

és a dir: $\mathbf{a_n = a_{n-1} \cdot r}$

com $a_n = a_{n-1} \cdot r = a_{n-2} \cdot r^2 = a_{n-3} \cdot r^3 = \ldots = a_1 \cdot r^{n-1}$

tenem que per el terme generals d'una progressió geomètrica és $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$.

Exemple:

- 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 són els 7 termes d'uns progressió geomètrica de raó 2 i primer terme 3
- Els 10 primers termes d'una progressió geomètrica de raó 1.05 1 primer terme 100 són: 100; 105; 110,25; 115,7625; 121,550625; 127,628156; 134,009564; 140,710042; 147,745544; 155,132822.
  Observeu que si dipositem 100€ a un banc a un interès compost anual del 5%, el capital del que podem disposar al final de cada any és la progressió anterior.

Producte de termes equidistants dels extrems d'una progressió geomètrica

Si a_n és una progressió geomètrica de n termes $a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$

És a dir:

A una progressió geomètrica de n termes
el producte de termes equidistants dels extrems és constant.

ja que:

$$a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot r^{1+k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{1+k-1+n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

Producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}} .$$

Obvi a partir de la propietat anterior.

Suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} .$$

ja que:

si anomenem **S** a aquesta suma

$\mathbf{S} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \mathbf{S} = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow$

$\mathbf{S} = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$ (1)

$\mathbf{S} \cdot r = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^n$ (2)

si ara fem (2) – (1)

$\mathbf{S} \cdot r - \mathbf{S} = a_1 \cdot r^n - a_1$

i operant $\mathbf{S} \cdot (r - 1) = a_1 \cdot r^n - a_1 = a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1 = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$.

Exemple:

- Diuen que un poderós príncep de la índia, va voler recompensar a l'inventor dels escacs; aquest li va demanar un gra de blat per la primera casella, dos per la segona, quatre per les tercera, és a dir cada casella doblés el número de grans de l'anterior. Quants grans de blat li corresponen a la darrera casella del tauler i quants grans de blat demanava?

  Com el tauler d'escacs de 8 per 8 = 64 caselles, a aquesta li correspondran $1 \cdot 2^{64}$ grans és a dir prop de $9.2 \cdot 10^{18}$ grans.

  I el número total de grans que demanava és de $S = \dfrac{a_{64} \cdot 2 - a_1}{2-1} \approx 1.8 \cdot 10^{19}$.

  Evidentment el príncep no va poder donar la recompensa.

Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $|r|<1$.

Si a_n és una progressió geomètrica de raó r amb $|r|<1$, tenim que la suma dels infinits termes de la progressió és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \dfrac{a_1}{1-r}$.

ja que:

de la propietat anterior

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{n+1}}{r-1} + \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{n+1}}{r-1} + \frac{a_1}{1-r}$$

com quan $n \longrightarrow \infty$ el primer sumand tendeix a 0, tenim que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Exemple:

Quin és el valor de $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \ldots}}}}$

Com : $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \ldots}}}} = \left(3 \cdot \left(3 \cdot \left(3 \cdot (3 \cdot \ldots)^{1/2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \right)^{1/2}$

per les propietats de les potències

$\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \ldots}}}}\ 3^{1/2} \cdot 3^{1/4} \cdot 3^{1/8} \cdot 3^{1/16} \ldots = 3^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots}$

I com $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ..$ és la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $r = \dfrac{1}{2}$

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + .. = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

amb el que $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \ldots}}}} = 3^1 = 3$.