Funcions polinomiques

Definició

Un polinomi amb coeficients reals és una expressió de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

on $a_0, a_1, ..., a_n$ són nombres reals que multipliquen la x i se'n diuen **coeficients** ; del valor a_0 acostumen a dir-ne el **terme independent**.

La **variable** d'un polinomi és la lletra x que hi apareix; tot i que aquesta lletra x és la que s'utilitza gairebé sempre, de fet se'n pot fer servir qualsevol altra.

Els sumands $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ s'anomenen els **termes** del polinomi.

Grau d'un polinomi és el més gran dels exponents de x que apareix en el polinomi .

Operacions amb polinomis

Suma

Si p(x) i q(x) són dos polinomis de variable x, la suma de p(x) i q(x) , que representem com p(x) + q(x), .és el polinomi que s'obté sumant els coeficients corresponents a la mateixa potència de la x en els dos polinomis.

Exemple

Fem la suma dels polinomis $p(x) = 5+ 3x – 2x^2$ i $q(x) = 6 + 2x + 4x^2 + 7x^3$

$$p(x) + q(x) = (5+ 3x – 2x^2) + (6 + 2x + 4x^2 + 7x^3) = 11 + 5x + 2x^2 + 7x^3$$

Propietats de la suma

És fàcil comprovar que la suma de polinomis és:

Associativa: [p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]

Commutativa: p(x) + q(x) = q(x) + p(x)

Té **element neutre**: el polinomi amb tots els coeficients 0 ; $0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$.

Té **element oposat**.

Si p(x) e´s un polinomi de grau n el seu oposat –p(x),és una altre polinomi que s'obté canviant el signe de tots els coeficients de p(x).

El conjunt $\mathbf{R}[x]$ amb la suma es un grup abelià.

Producte de polinomis

Producte d'un monomi per un polinomi:

Considerem el polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ i el monomi b_jx^j

llavors

$$b_jx^j \cdot p(x) = b_jx^j \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n) =$$
$$= b_jx^j \cdot a_0 + b_jx^j \cdot a_1x + b_jx^j \cdot a_2x^2 + ... + b_jx^j \cdot a_nx^n =$$
$$= b_j \cdot a_0x^j + b_j \cdot a_1x^{1+j} + b_j \cdot a_2x^{2+j} + ... + b_j\cdot a_nx^{n+j}$$

Exemple

Si $p(x) = 4x + 2x^2 - 6x^3 \Rightarrow p(x)\cdot 3x^2 = (4x + 2x^2 - 6x^3)\cdot 3x^2 = 12x^3 + 6x^4 - 18x^5$.

Producte de dos polinomis:

Si p(x) i q(x) són dos polinomis de variable x, la suma de p(x) i q(x) , que representem com p(x) + q(x), .és el polinomi que s'obté sumant els coeficients corresponents a la mateixa potència de la x en els dos polinomis.

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ i $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$

$p(x)\cdot q(x)= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)\cdot(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m) =$
es multiplica el primer polinomi per cada terme del segon i es sumen els resultats

$p(x)\cdot q(x)= (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)\cdot(b_0 + b_1x + ... + b_mx^m) =$
$= (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)b_0 + (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)b_1x + (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)b_2x^2 +...$
$+ ... + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)b_mx^m$
Observeu que grau $p(x)\cdot q(x)$ = grau p(x) + grau q(x)

Exemple

$p(x) = 4x + 2x^2 - 6x^3$ i $q(x) = -1+ 3x - 2x^2 + x^3$

			$4x$	$+ 2x^2$	$- 6x^3$		p(x)
		-1	$3x$	$- 2x^2$	x^3		q(x)
			$4x^4$	$2x^5$	$-6x^6$	⟵	$p(x)\cdot x^3$
		$-8x^3$	$-4x^4$	$12x^5$		⟵	$p(x)\cdot(-2x^2)$
	$12x^2$	$6x^3$	$-18x^4$			⟵	$p(x)\cdot 3x$
$-4x$	$- 2x^2$	$6x^3$				⟵	$p(x)\cdot(-1)$
$-4x$	$10x^2$	$4x^3$	$-18x^4$	$14x^5$	$-6x^6$	⟵	$p(x)\cdot q(x)$

$P(x)\cdot Q(x) = (4x + 2x^2 - 6x^3)\cdot(-1+ 3x - 2x^2 + x^3)= -4x + 10x^2 +4x^3 - 18x^4 +14x^5 -6x^6$

Propietats del producte

Es faciñ de comprovar que el producte de polinomis compleix les propietats:
Associativa: $[P(x) \cdot Q(x)] . R(x) = P(x) . [Q(x) . R(x)]$
Commutativa: $P(x) . Q(x) = Q(x) . P(x)$
Element unitat: és el polinomi 1
Distributiva respecte a la suma: $P(x) . [Q(x) + R(x)] = P(x) . Q(x) + P(x) . R(x)$

Observeu que **R**[x] amb la suma i producte que hem definit, té les mateixes propietats que els nombres enters amb la suma i el producte; quan un conjunt amb dues operacions té aquestes propietats, diem que té estructura d'anell .

Divisió de polinomis

A l'anell **R**[x] introduïm la idea de divisió gairebé de la mateixa forma que s'introdueix la divisió entre enters; així doncs:

Si D(x) i d(x) són dos polinomis, fer la divisió entera de D(x) entre d(x) , és trobar un parell de polinomis q(x) i r(x) que compleixin les condicions:
D(x) = d(x) . q(x) + r(x) on grau r(x) < grau de d(x).

D(x)	d(x)		Dividend	divisor
r(x)	q(x)		resid	quocient

Si el residu de la divisió dels polinomis D(x) per d(x) és 0, la divisió s'anomena **exacta**.

Exemple:

$6x^4$	$-x^3$	$+2x^2$		$+1$	$3x^2 -2x +5$
$-6x^4$	$4x^3$	$-10x^2$			$2x^2 + x -2$
	$3x^3$	$-8x^2$			
	$-3x^3$	$2x^2$	$-5x$		
		$-6x^2$	$-5x$	$+1$	
		$6x^2$	$-4x$	$+10$	
			$-9x$	$+11$	

$2x^4$	$-3x^3$	$+2x^2$		$+2$	$x + 3$
$-2x^4$	$-6x^3$				$2x^3 -9x^2+29x - 87$
	$-9x^3$	x^2			
	$9x^3$	$27x^2$			
		$29x^2$			
		$-29x^2$	$-87x$		
			$-87x$	$+2$	
			$87x$	$+261$	
				263	

Regla de Ruffini

Aquesta regla és un cas particular de la divisió quan el divisor té la forma x ± a. Constitueix una forma ràpida de fer la divisió emprant solament els coeficients.

	2	-3	2	0	2
-3		-6	27	-87	261
	2	-9	29	-87	263

Múltiples i divisors

Si P(x) i Q(x) són dos polinomis, diem que

P(x) és múltiple de Q(x) $\Leftrightarrow$ existeix C(x) polinomi de manera que P(x) = Q(x)·C(x)

En aquest cas es diu que

Q(x) és divisor de P(x) o que P(x) és divisible per Q(x)

Quan un polinomi sols és divisible per polinomis de grau 0 (números reals) o per ell mateix , es diu que és un polinomi **primer**.

Teorema del residu

$P(x)\in\mathbf{R}[x]$ i $a\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ **el residu de la divisió de P(x) entre x-a coincideix amb P(a)**

és a dir:

$$\boxed{\text{Residu } \frac{P(x)}{x-a} = P(a)}$$

ja que si fem la divisió d'un polinomi P(x) entre x - a , obtenim un polinomi Q(x) com a quocient i un residu r(x).

$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + r(x)$ (1)

com grau r(x) < grau divisor = 1 $\Rightarrow$ grau r(x) = 0 $\Rightarrow$ r(x)és un nombre real.

si a (1), substituïm la x per a, obtenim $p(a) = (a-a)\cdot q(a) + r(a) = 0 \cdot q(a) + r = r \Rightarrow$

$P(a)=$ residu $\dfrac{P(x)}{x-a}$

Propietat

Un polinomi P(x) és divisible per $x - a$ $\Leftrightarrow$ P(a) = 0.

Evident a partir del teorema del residu.

Arrels o zeros d'un polinomi

Anomenem **arrel** d'un polinomi P(x) tot nombre real a tal que P(a) = 0; per aquesta raó de les arrels també se'n diuen **zeros** del polinomi.

Descomposició d'un polinomi en factors.

Quan treballàvem amb números enters, si havíem de trobar múltiples o divisors d'un nombre o d'uns quants nombres, ens facilitava els càlculs el tenir la seva descomposició en factors primers; amb els polinomis passa una casa semblant, per això ens plantegem el com descomposar els polinomis amb producte de polinomis primers.

Propietat

$P(x)\in\mathbf{R}[x]$

grau(P)=n $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ zeros de $P(x) \Rightarrow P(x)=k\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\dots\cdot(x-\alpha_n)$ amb $k\in\mathbf{R}$

Ja que
D'acord amb el teorema del residu, si un nombre real a és arrel del polinomi P(x), aquest és divisible pel binomi x – a i aleshores es pot posar com P(x)=(x-a)·C(x) on C(x) és el quocient de la divisió.
Aplicant aquest raonament n vegades, podem dir que

$$P(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)\cdot C(x)$$

Com el producte de $(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ dóna un polinomi de grau n $\Rightarrow$ grau (C)=0 $\Rightarrow$ C(x) és un nombre real.

La propietat anterior ens diu que el problema d'esbrinar si un polinomi P(x) té divisors de primer grau es redueix a trobar les seves arrels; la qüestió però no és senzilla.
En el cas de polinomis de grau 1 o 2 és fàcil trobar les arrels amb el que és senzill de factoritzar-los; però per graus més grans, cal provar sort amb diferents propietats com:

a **enter** i P(x) és un polinomi amb **coeficients enters**
a és arrel del polinomi amb coeficients enters$\Rightarrow$ a divideix el terme independent a_0
ja que:
Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
a és arrel de P(x) $\Rightarrow P(a) = a_0 + a_1 . a + a_2 . a^2 + \ldots + a_n . a^n = 0$
isolant a_0 i treient a factor comú
$a_0 = -a_1 . a - a_2 . a^2 - \ldots - a_n . a^n = a . (-a_1 - a_2 . a - \ldots - a_n . a^{n-1}) \Rightarrow$ a divisor de a_0

Exemples:

- Factoritzem $P(x)=-2x^2 + 2x -12$
  Per això plantegem $-2x^2+2x-12=0$
  i resolem l'equació $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{-4} = \dfrac{-2 \pm 10}{-4} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$
  $\Rightarrow P(x)=-2x^2 + 2x -12= k\cdot(x+2\cdot(x-3)$
  com si fem el producte de x+2 per x-3, veiem que el coeficient de grau 2 seia 1, i ha de ser -2, tindrem que k=-2
  per tant $P(x) = -2x^2 + 2x -12 = -2\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

- Descomposem en factors primers $Q(x) = x^2+x+1$
  Plantegem $x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ no descomposa $\Rightarrow$ és un polinomi **primer**.

- Descomposem $R(x)= x^5 + 4x^4+ 4x^3$
  Està clar que podem treure x^3 factor comú i queda $R(x)=x^3\cdot(x^2+4x+4)$
  Com x^2+4x+4 é el quadrat d'una suma , tenim que
  $R(x)=x^3\cdot(x^2+4x+4)=x^3\cdot(x+2)^2$

- Descomposem $S(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

  Com els divisors de 4 són -1, 1, -2, 2, -4 i 4

Provarem per aquests valors

Com $P(-1) = 1 - 5 + 4 = 0$ 1 és arrel de p(x) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x)=(x^3-x^2-4x+4)\cdot(x+1)$

Provem ara $P(1)=1-5+4=0 \Rightarrow$ 1 és arrel de p(x) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x)=(x^3-x^2-4x+4)\cdot(x+1)=(x^2-4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Com $x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$

tenim que: $S(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Màxim comú divisor i mínim comú múltiple

El màxim comú divisor d'un conjunt de polinomis, és el polinomi de major grau que és divisor de tots.

Si els polinomis els tenim descompostos en factors primers, el màxim comú divisor és el producte dels factors comuns a tots ells amb el menor exponent amb què apareixen en les descomposicions corresponents.

Per mínim comú múltiple d'un conjunt de polinomis, entenem al polinomi de menor grau que és múltiple de tots.

El mínim comú múltiple de dos o més polinomis és el producte dels factors comuns i no comuns amb el major exponent amb què apareixen en les descomposicions.

Exemple:

Trobem el McD i mcm dels polinomis $S(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ i $R(x)= x^5 + 4x^4+ 4x^3$

En els exemples anteriors hem vist que:

$R(x)=x^3\cdot(x^2+4x+4)=x^3\cdot(x+2)^2$

$S(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

amb el que el $McD(R,S)= x+2$

i el $mcm(R,S)=x^3\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Fraccions polinòmiques

Recordem que donats dos enters a i b no sempre és possible la divisió exacta a entre b, és a dir, a/b no sempre és un nombre enter; per això s'introdueix el concepte de fracció $\frac{a}{b}$ i, a partir d'aquí, el conjunt dels nombres racionals.

Seguint el paral·lelisme amb el enters, definim les fraccions polinòmiques en la forma

Donats p(x) i q(x) dos polinomis $q(x) \neq 0$, definim $\frac{p(x)}{q(x)}$ el parell ordenat (p(x),q(x)) , de p(x)en diem numerador i de i q(x) denominador.

Equivalència de fraccions.

Dues fraccions $\frac{a(x)}{b(x)}$ i $\frac{c(x)}{d(x)}$ i es són **equivalents** $\Leftrightarrow$ a(x) . d(x) = b(x) . c(x).

Al igual que amb els enters, quan $\frac{a(x)}{b(x)}$ i $\frac{c(x)}{d(x)}$ són **equivalents** diem que són iguals.

Si multipliquem o dividim el numerador i el denominador d'una fracció polinòmica per un mateix polinomi no nul, la fracció que resulta és equivalent a la primera..

Operacions amb fraccions polinòmiques

Suma de fraccions:

- Si les fraccions sumands tenen el mateix denominador, la fracció suma té el mateix denominador i, com a numerador, la suma dels numeradors.
$$\frac{a(x)}{d(x)}+\frac{b(x)}{d(x)}=\frac{a(x)+b(x)}{d(x)}$$
- Si les fraccions tenen denominadors diferents, cal primer transforma-les en dues fraccions equivalents a les inicials que tinguin el mateix denominador i després fer la suma com en el cas anterior.
$$\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a(x)\cdot q(x)}{b(x)\cdot q(x)}+\frac{p(x)\cdot b(x)}{q(x)\cdot b(x)}=\frac{a(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot q(x)}$$

Propietats de la suma:

- Associativa: $\frac{p(x)}{q(x)}+\left[\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{c(x)}{d(x)}\right]=\left[\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{a(x)}{b(x)}\right]+\frac{c(x)}{d(x)}$
- Commutativa: . $\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{c(x)}{d(x)}+\frac{a(x)}{b(x)}$
- Element neutre: és 0(x)
- Element oposat: tota fracció $\frac{a(x)}{b(x)}$ té com a oposada la fracció $\frac{-a(x)}{b(x)}$

Per tant les fraccions polinòmiques amb la suma són un grup abelià.

Producte de fraccions

El producte de dues fraccions polinòmiques és la fracció polinòmica que té com a numerador el producte dels numeradors i com a denominador el producte dels denominadors: $\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot d(x)}$

Propietats del producte

- Associativa: $\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \left[\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)}\right] = \left[\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}\right] \cdot \frac{c(x)}{d(x)}$
- Commutativa: $\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{c(x)}{d(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$.
- Element unitat: $\frac{p(x)}{p(x)}$ amb $p(x) \neq 0$
- Element invers: Tota fracció $\frac{a(x)}{b(x)}$ amb $a(x) \neq 0$ té per inversa $\frac{b(x)}{a(x)}$
- Distributiva respecte de la suma $\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \left[\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)}\right] = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)}$

Per això diem que el conjunt de les fraccions polinòmiques amb aquesta suma i aquest producte, són un cos commutatiu.

Funció exponencial

Entenem per funció exponencial a una potència on la base és constant i la variable és l'exponent; és dir:

Si **a** $\in$ **R** a>0 i a≠1 la funció exponencial de base a és

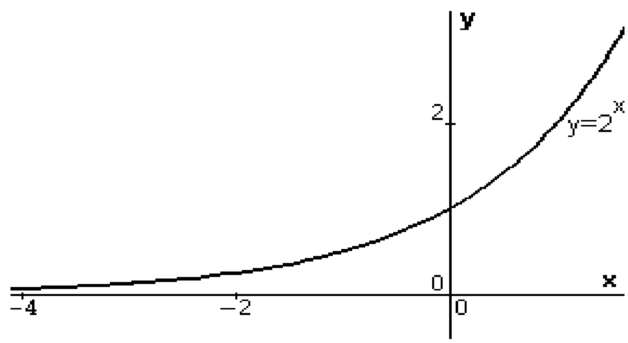
$$\mathbf{exp_a : R \longrightarrow R}$$
$$\mathbf{x \longrightarrow a^x}$$

Exemples

- **La funció $\exp_2(x) = 2^x = y$**

  Fent una petit taula de valors , veiem que el seu gràfic és:

x	$\exp_2(x) = 2^x$
-4	2^{-4}=0.0625
-3	2^{-3}=0.125
-2	2^{-2}=0.25
-1	2^{-1}=0.5
0	2^0=1
0.5	$2^{0..5}$=1.41
1	2^1=2
1.5	$2^{1..5}$=2.82
2	2^2=4



- **L'interès compost**

  Si col·loquem un capital C_0 a un banc amb un interès en tant pe u de i , al complir-se un any el que podem retirar és $C(1)=C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$.

  Si no retirem ni els diners inicials ni els interessos que ens han donat, el segon any tindrem $C(2) = C(1)\cdot(1+i) = C_0\cdot(1+i) \cdot(1+i) = C_0\cdot(1+i)^2$.

  Si el següent any tampoc retirem ni diners ni interessos, al finalitzar el periode tindrem un capital $C(3)= C_0\cdot(1+i)^3$.

  I passats t anys el capital que podem treure és de $C(t)= C_0\cdot(1+i)^t$.

Característiques

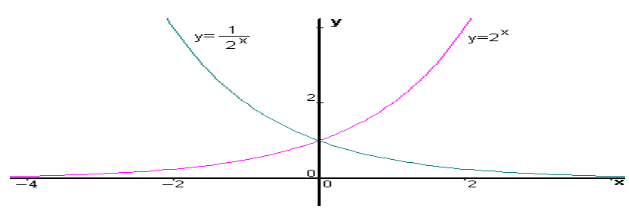
Domini i recorregut

Com a>0 qualsevol nombre real x té imatge per $y=a^x \Rightarrow \mathrm{Dom}(a^x) = \mathbf{R}$ **.**

Al ser $a>0 \Rightarrow a^x>0$ i com $a\neq1 \Rightarrow$ per qualsevol valor de y, podem trobar una x de manera que $y_0=a^x \Rightarrow \mathrm{Rec}(a^x)=(0,\infty)$

Creixement

- Si $a>1 \Rightarrow y=a^x$ és creixent
- Si $a<1 \Rightarrow y=a^x$ és decreixent



Injectivitat

La funció $y=a^x$ és injectiva, ja que per les propietats de les potències sabem que

$a^x=a^y \Rightarrow x=y$.

Funció logarítmica

Com la funció exponencial de base a és injectiva, tenim que

$$\mathbf{exp_a :}\quad \mathbf{R} \longrightarrow (0,\infty)$$
$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{a^x}$$

és bijectiva i per tant ens podem plantejar la seva inversa per la composició; aquesta inversa és del que en diem funció logarírmica de base a.

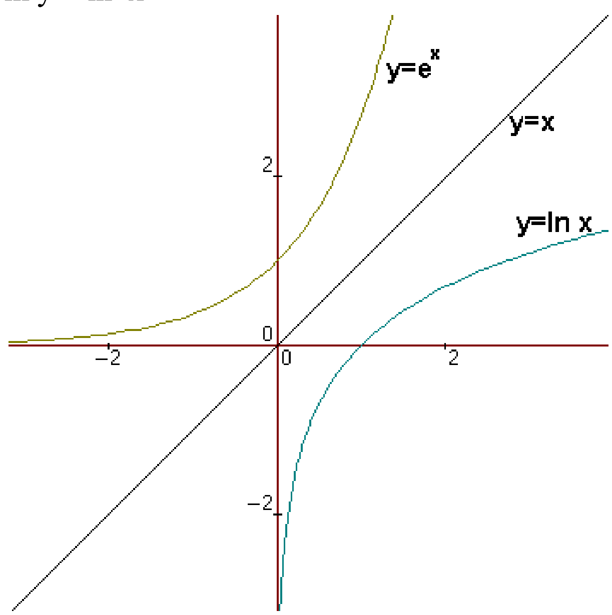
$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{R} & \longrightarrow & (0,\infty) & \\ \mathbf{exp_a:} & \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y=a^x} & \\ & \mathbf{x} & \longleftarrow & \mathbf{y} & \mathbf{:log_a} \end{array}$$

Definició

Si $a\in\mathbf{R}$ $a>0$ i $a\neq 1$, i $x\in(0,\infty)$, anomenem logaritme en base a de x, a l'exponent que cal elevar la base per que doni x

és a dir $\mathbf{y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x}$

amb aquesta definició és clar que el logaritme és la inversa de l'exponencial.
El gràfic del logaritme serà el simètric respecte la recta y=x, del gràfic de l'exponencial.
Les bases de logaritmes més habituals són 10 i llavors ho posem com $y = \log x$
i **e** que s'expressa com $y = \ln x$



Exemples:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ $\log_2 8 = 3$, ja que $2^3=8$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ja $2^{-3}=\frac{1}{8}$ $\log 1000 = 3$ ja que $1000=10^3$

$\log \frac{1}{1000} = -3$, ja que $10^{-3}=\frac{1}{1000}$

Propietats algebraiques dels logarítmes

El logaritme d'un producte és la suma dels logarítmes

$\mathbf{log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y}$

ja que:

per definició de logaritme $x=a^{\log x}$ i $y=^{\log y}$

$\Rightarrow x \cdot y = a^{\log x} \cdot a^{\log y} = a^{\log x + \log y}$

com $x \cdot y = a^{\log(x \cdot y)} \Rightarrow$

$a^{\log(x \cdot y)} = a^{\log x + \log y} \Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

El logaritme d'un quocient és la diferència dels logaritmes

$$\mathbf{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$$

ja que:

per definició de logaritme $x=a^{\log x}$ i $y=^{\log y}$

$\Rightarrow x/y = a^{\log x} / a^{\log y} = a^{\log x} \cdot a^{-\log y} = a^{\log x - \log y}$

com $x/y = a^{\log(x/y)} \Rightarrow$

$a^{\log(x/y)} = a^{\log x - \log y} \Rightarrow \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

Logarítme d'una potència és l'exponent pel logarítme de la base de la potència

$\mathbf{log_a x^y = y \cdot log_a x}$

ja que:

Per definició de logaritme $x = a^{\log x} \Rightarrow x^y = \left(a^{\log x}\right)^y = a^{y \cdot \log x}$

com $x^y = a^{\log x^y} \Rightarrow a^{\log x^y} = a^{y \cdot \log x} \Rightarrow \log_a x^y = y \cdot \log_a x$

Logarítme d'una arrel $\quad \boldsymbol{log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot log_a x}$

ja que: com $\sqrt[y]{x} = x^{\frac{1}{y}}$ $\qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \log_a x^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x$

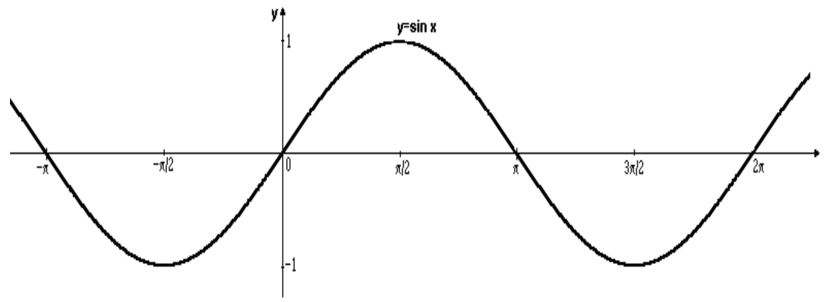
Funcions circulars.

Funció sinus

Definim la funció sinus com una funció que a cada nombre real α, li assigna el sinus de l'angle que té α radiants.

$$\textbf{sin: } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\alpha \longrightarrow \textbf{sinus de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants}$$

Domini = R
Recorregut = [-1,1] .
Periòdica de període $2\cdot\pi$ $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
Es imparell $\sin(-x) = -\sin x$
Creix en el primer i quart quadrant i decreix en el segon i tercer.
Es contínua.

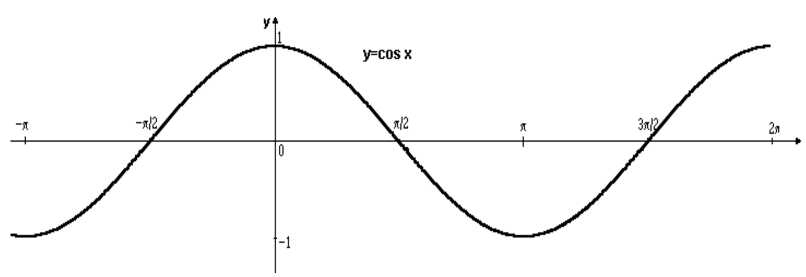


Funció cosinus

Definim la funció cosinus com una funció que a cada nombre real α, li assigna el cosinus de l'angle que té α radiants.

$$\textbf{cos } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\alpha \longrightarrow \textbf{cosinus de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants}$$

Domini = R
Recorregut = [-1,1] .
Periòdica de període $2\cdot\pi$ $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
Es parell $\cos(-x) = \cos x$
Decreix en el primer i segon quadrants i creix en el tercer i quart.
Es contínua.



Funció tangent

Definim la funció tangent com una funció que a cada nombre real α, li assigna el cosinus de l'angle que té α radiants.

$$\mathbf{tg} \quad \mathbf{R}\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi \mid k\in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\alpha \longrightarrow \textbf{tangent de l'angle de } \alpha \textbf{ radiants}$$

Domini = $R\backslash\{\pi/2+k\cdot\pi \mid k\in Z\}$

Recorregut = R.

Periòdica de període π $\quad$ $tg(x+\pi) = tg\ x$.

Es imparell $tg(-x) = -tg\ x$

Creixent a cada interval del seu domini.

Continua a tots els reals excepte en els punts $\pi/2 + k\cdot\pi$ on té discontinuïtats asimptòtiques.