FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL.

Si tenim A i B dos conjunts no buits de números reals, entenem per
funció real de variable real de A en B, a qualsevol llei, fórmula, relació o critèri que assigna a cada element x del conjunt A ún **únic** element y del conjunt B.
Si d'aquesta llei en diem f, s'acostuma posar-ho en la forma y=f(x).
Sovint, per remarcar els conjunts A i B, ho posem com

$$\begin{aligned} f:A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

De la y_0 que li correpon a una x_0 , en diem **imatge** de x_0.

A les funcions reals de variable real, el conjunt A on està definida la funció és coneix com a **domini** =dom(f), mentre que del conjunt $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ és anomenat **recorregut**.
El conjunt $f(A)=\{y\in B \ / \ y=f(x)\}$ = conjunt dels elements que són imatges d'algun element de A, i es coneix amb el nom de **conjunt imatge o conjunt de les imatges**.

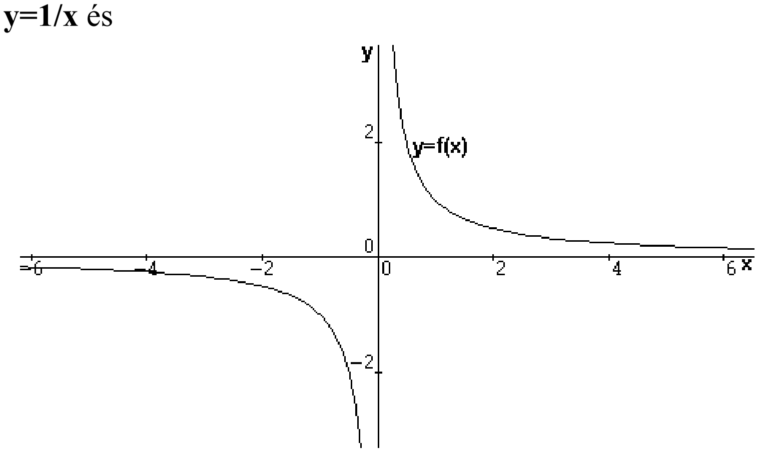
La x es coneix com a **variable independent** i la y és l'anomenada **variable dependent**.

Per determinar una funció, cal especificar el conjunt de sortida, el conjunt final i la fórmula que permet obtenir les imatges; però, sovint donem les funcions només a partir de la fórmula, sobreentenent que el domini serà el conjunt de reals on aquesta fórmula es pot aplicar.

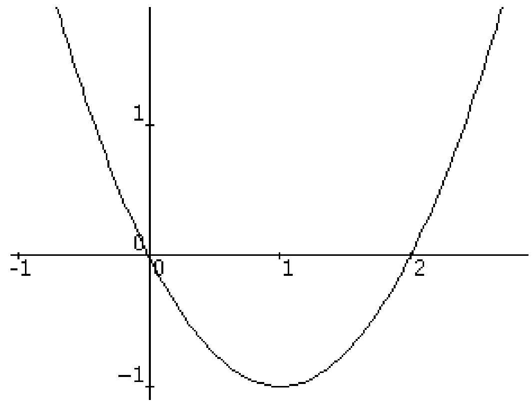
Així parlem de la funció y=1/x, en lloc de donar-la correctament en la forma

$$\begin{aligned} R\backslash\{0\}: &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow 1/x \ . \end{aligned}$$

El **gràfic** de la funció és conjunt dels parells ordenats, on el primer element és de A i el segon element és la seva imatge. $G=\{(x,f(x)),\ x\in A\}$; com A, B són subconjunts de reals i els nombres reals els podem identificar amb una recta, el conjunt G, l'acostumem a representar en uns eixos de coordenades.
Així el gràfic de **y=1/x** és

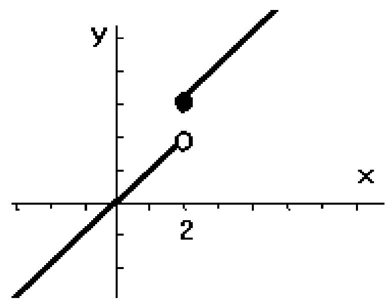


El gràfic de $\mathbf{y = x^2\text{-}2x}$ és:



El gràfic de

$$y = \begin{cases} x & \text{quan } x<2 \\ x+1 & \text{quan } x\geq 2 \end{cases}$$



Si $y_0 \in f(A)$ podem considerar les x que tenen per imatge aquest y_0, $\{x\in A \ / \ f(x) = y_0\}$, que anomenem **anti-imatges de $\mathbf{y_0}$** i representem per $f^{-1}(x_0)$.

Tipus de funció

Funció Injectiva

Una funció f de A en B diem que és **injectiva** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **elements diferents tenen imatges diferents** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x_1,x_2 \in A \ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$

$\Leftrightarrow \forall \mathbf{x_1,x_2 \in A \quad f(x_1)= f(x_2) \Rightarrow \ x_1 = x_2}$

Exemples

- La funció y=x+5, és injectiva,
  si $y(x_1)=y(x_2) \Rightarrow x_1 + 5 = x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.
- La funció $y=x^2 + 5x$, no és injectiva doncs
  $y(0)=0^2 +5\cdot 0 = 0$, $y(-5)=(-5)^2 +5(-5)=0 \Rightarrow y(0)=y(-5)$ i en camvi $0\neq -5$.

Exhaustiva

Una aplicació f de A en B diem que és **exhaustiva** ⇔ tot element de B és imatge d'algun element de A⇔ $\forall y\in B \Rightarrow \exists x\in A$ **i** $y=f(x) \Leftrightarrow B=f(A)$

Exemples

- La funció f(x) = x+5 és exhaustiva, ja que:
  donat y_0 real, si plantejem $f(x)=y_0 \Rightarrow x+5=y_0 \Rightarrow x=y_0-5 \Rightarrow$ per tant existeix una x de manera que $f(x)=y_0 \Rightarrow$ f exhaustiva.
- La funció $f:R \longrightarrow R$ que $f(x)=x^2$ no és exhaustiva, ja que no existeix cap nombre real que elevat al quadrat doni -4.
- La funció $g:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ $g(x)=x^2$ és exhaustiva doncs donat $y_0\in[0,\infty)$ existeix $x_0=\sqrt{y_0}$ de manera que $(\sqrt{y_0})^2=y_0$.

Bijectiva

Diem que una aplicació f és **bijectiva** ⇔ f injectiva i exhaustiva.

- Per exemple la aplicació dels real als reals que a cada x li assigna f(x)=x+5 hem vist que era injectiva i exhaustiva ⇒ f(x)=x+5 és bijectiva.

OPERACIONS AMB FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL.

Donades $\begin{array}{l} f:A \longrightarrow B \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$ i $\begin{array}{l} g:A' \longrightarrow B' \\ x \longrightarrow g(x) \end{array}$ reals de variable real, definim:

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

És clar que: El domini de la suma és la intersecció dels dominis de f i g, ja que per poder parlar de (f+g)(x) , cal poder parlar de f(x) i g(x).

- És associativa: $(f+g)+h = f+(g+h)$.
- Té element neutre: l'aplicació $\begin{array}{l} 0:R \longrightarrow R. \\ x \longrightarrow 0 \end{array}$
- Té element oposat: la funció oposada per la suma de y=f(x) és la y=-f(x).
- És commutativa $f+g = g+f$.

Producte: $(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

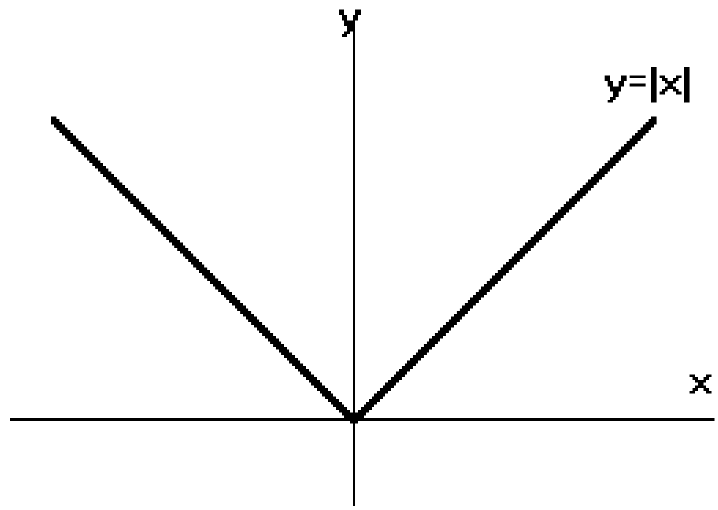
És clar que: La funció producte té per domini la intersecció dels dominis de f i g.

- És associatiu: $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$.
- Té element unitari: l'aplicació $\begin{array}{l} 1:R \longrightarrow R . \\ x \longrightarrow 1 \end{array}$
- És commutatiu $f\cdot g = g\cdot f$.
- És distributiu respecte de la suma $f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h$
- En general no hi ha element invers.

LA FUNCIÓ VALOR ABSOLUT.

Anomenem valor absolut de x = $|x|$ a l'aplicació real de variable real definida en la forma:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{quan } x<0 \\ x & \text{quan } x\geq 0 \end{cases}$$



El gràfic de la funció valor absolut és ja que:

si $x<0 \Rightarrow y = -x$ que és una recta
si $x>0 \Rightarrow y = x$ que és una recta
si $x=0 \Rightarrow y = 0$

Composició de funcions.

Si tenim dues funcions $f:A \longrightarrow B$ i $g:C \longrightarrow D$

$x \longrightarrow f(x)=u \quad u \longrightarrow g(u)=y$

Quan B és un subconjunt de C, podem considerar

$$A \xrightarrow{f} B \subset C \xrightarrow{g} D$$
$$x \longrightarrow f(x)=u \longrightarrow g(u)=g(f(x))$$

és a dir:

$$A \longrightarrow D$$
$$x \longrightarrow g(f(x))$$

nova funció de A en B, que anomenem composició de f amb g i expressem com $\mathbf{g \circ f}$.

És a dir $\mathbf{(g \circ f)(x)=g(f(x))}$.

Es pot comprovar que la composició de funcions és:

- **Associativa :** $\mathbf{f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h}$

  $[f \circ (g \circ h)](x)=f[(g \circ h)(x)] = f(g(h(x)))$

  $[(f \circ g) \circ h](x)= (f \circ g) h(x) =f(g(h(x)))$

  $\Rightarrow \mathbf{f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h}$

- En general, **no és commutativa**. $\mathbf{f \circ g \neq g \circ f}$

  ja que:
  $f(x) = x^2 - 7$ i $g(x) = x - 1$
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 - 5 = x^2 -2x + 1 -7 = x^2 -2x - 6$
  $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2 -7) = x^2 - 7 - 1 = x^2 - 8$.

- **Té element neutre**
  que és la funció identitat $\mathbf{I:R \longrightarrow R}$
  $\mathbf{x \longrightarrow x}$

  ja que:
  si tenim $y=f(x)$ un funció real de variable real,
  $(f\circ I)(x)=f(I(x))=f(x) \Rightarrow f\circ I = f$
  $(I\circ f)(x)=I(f(x))=f(x) \Rightarrow I\circ f = f$

- En general **no té element invers** .
  Però si dues apliacions $f: A \longrightarrow B$ i $g:B \longrightarrow A$
  $x \longrightarrow f(x)$ $y \longrightarrow g(y)$
  compleixen que $f\circ g=I$ i $g\circ f=I$, llavors diem que f i g són **inverses per la composició** i en aquest cas, g s'acostuma a designar per f^{-1} .

  Es pot comprovar que f admet inversa $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

  Per trobar la inversa d'una funció, n' hi ha prou en

$f(x) = 3x - 5$	possar $y=f(x)$
$y = 3x - 5$ $y + 5 = 3x$	entendr-ho com una equació resoldre l'equació
$\frac{y+5}{3} = x$	s'obté $x=g(y)$.
$\frac{x+5}{3} = y$	com el nom de la variable és arbitrari cambiem les x per y i les y per x
$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$	

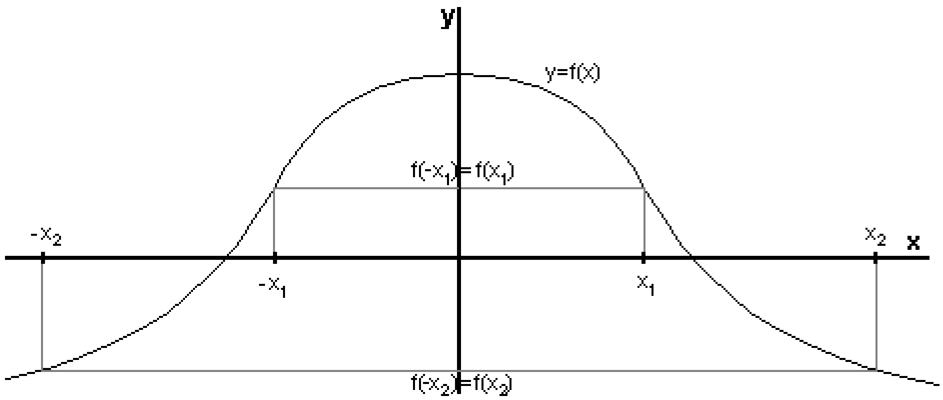
PARITAT

Si tenim una funció y=f(x) diem que:

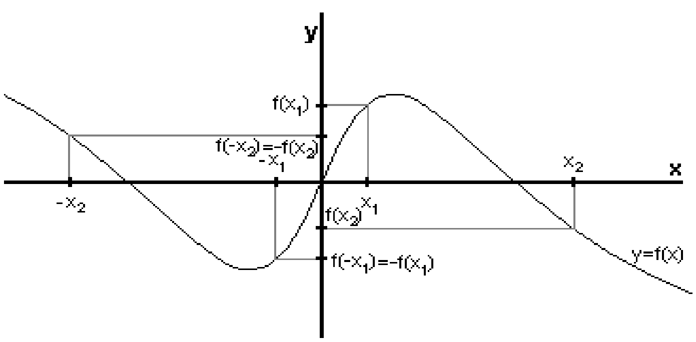
f és parella $\Leftrightarrow \forall$ x $\in$dom f f(x) = f(-x)

És clar que

f parella $\Leftrightarrow$ f simètrica respecte l'eix de les Y.



f és imparella $\Leftrightarrow \forall$ x $\in$dom f f(x) = -f(-x)



f imparella $\Leftrightarrow$
f simètrica respecte del punt (0,0) .

Exemples:

- Estudiem la paritat de y(x)= $x^4 - 5x^2 + 2$.
  y(-x)=$(-x)^4 - 5(-x)^2 + 2 = x^4 - 5x^2 + 2$ = y(x) $\Rightarrow$ és parella.
- Paritat de $y(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

  trobem y(-x) , $y(-x) = \dfrac{-(x)^3}{(1-x)^2} = \dfrac{-x^3}{(1-x)^2}$

  com y(-x)$\neq$y(x) $\Rightarrow$ **no és parella** i com y(-x)$\neq$-y(x) $\Rightarrow$ **no és imparella**
- Paritat de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$
- com $y(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = \dfrac{-x}{1+x^2} = -y(x)$ $\Rightarrow$**és imparella**.

PERIODICITAT

Una funció y=f(x) és periòdica de període $\pi \neq 0 \Leftrightarrow \forall\ x \in$ **dom f** $\quad f(x+\pi) = f(x)$**.**

Observeu que quan sabem que una funció és periòdica, n'hi ha prou a estudiar-la a un interval de longitud el seu període.

Exemple:

- La funció $f(x)=3x+2$, **no és periòdica** , doncs si busquem p de manera que $f(x)=f(x+p)$ tenim que $3x + 2 = 3\cdot(x+p)+ 2 \Rightarrow 3x + 2 = 3x + 3p + 2 \Rightarrow 0 = 3p \Rightarrow p = 0$.
  Per tant f **no és periòdica**.

- $f(x)= \text{tg } x$ és **periòdica de període** π**.**

FITES D'UNA FUNCIÓ

Si $y=f(x)$ és una funció real de variable real, diem que:
f està **fitada superiorment** per $K \in R$ i que aquesta K és una **fita superior** de $y=f(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom } f \Rightarrow f(x) \leq K$.
Oberveu que si K és una fita supeior de $y=f(x) \Rightarrow$ qualsevol L major que K, també es fita superior de $y=f(x)$.

Exemples:

- La funció $y = \dfrac{3}{1+x^2}$ està **fitada superiorment per 3**.
  ja que : si elevem una x al quadrat, el resultat sempre és positiu o zero$\Rightarrow$
  si a 1 li sumem un valor positiu, el resultat és major o igual a 1$\Rightarrow$
  si dividim 3 per una valor major a igual a 1, el quocient és menor o igual a 3.
- La funció $y=\sin x$ és **fitada superiorment per 1**.
- La funció $y= x^2$ **no fitada superiorment**.

Diem que:
f està **fitada inferiorment** per $k \in R$ i que aquesta k és una **fita inferior** de $y=f(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom } f \Rightarrow k \leq f(x)$.

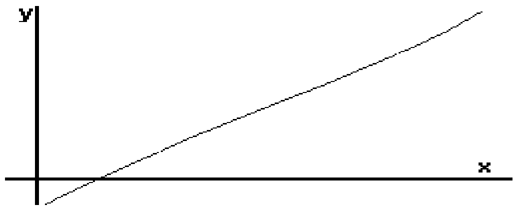
Exemples:

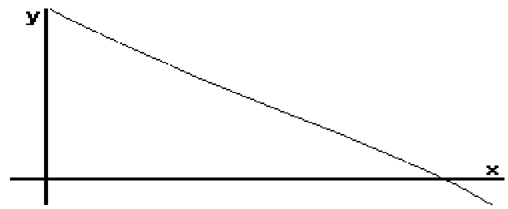
- La funció $y = \dfrac{3}{1+x^2}$ està **fitada inferiorment per 0**.
  ja que : el numerador és sempre positiu i per qualsevol x , $1+x^2$ també és sempre positiu $\Rightarrow$ el quocient sempre és positiu.
- $y= x^2$ és **fitada inferiorment per 0**, doncs qualsevol nombre al quadrat sempre és positiu.

Una funció fitada superior i inferiorment, es diu que està fitada.

CREIXEMENT I DECREIXEMENT D'UNA FUNCIÓ.

Observem les dues funcions que tenen un comportament força diferenciat, mentre la primera augmenta el valor de les imatges, quan augmentem el valor de les x, a la segona li passa tot el contrari, al augmentar les x, les y van disminuint.



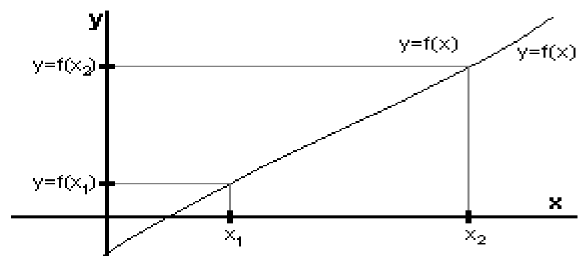


Per això quan tenim una funció $f:(a,b)\longrightarrow R$ diem que:

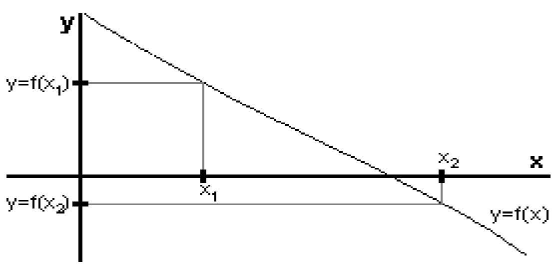
$$x \longrightarrow y=f(x)$$

f **creix** a l'interval (a,b) $\Leftrightarrow$

$\forall\ x_1, x_2 \in (a,b) \Rightarrow x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



mentre que



f **decreix** a interval (a,b) $\Leftrightarrow$

$\forall\ x_1,x_2 \in (a,b) \Rightarrow x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Exemple la funció y=3x+5, és creixent

ja que : si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow 3x_1 \leq 3x_2 \Rightarrow 3x_1+5 \leq 3x_2+5 \Rightarrow y(x_1) \leq y(x_2)$.

Sovint ens interessa parlar del creixement d'una funció de forma local, per això si $x_0 \in (a,b)$, diem que:

f és **creixent en x_0** $\Leftrightarrow \exists$ U entorn de x_0 i $\forall\ x \in U \Rightarrow \begin{cases} x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x_0 \leq x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0 \text{ i } \forall\ x\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x_0 \leq x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$$

És a dir:

f és creixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0 , els punts anteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0 , i els punts posteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0 .

f és **decreixent en x_0** $\Leftrightarrow$ $\exists$ U entorn de x_0 i $\forall$ $x \in U \Rightarrow \begin{cases} x \le x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) \\ x_0 \le x \Rightarrow f(x_0) \ge f(x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \le x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) \\ x_0 \le x \Rightarrow f(x_0) \ge f(x) \end{cases}$$

És a dir:
f és decreixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0.

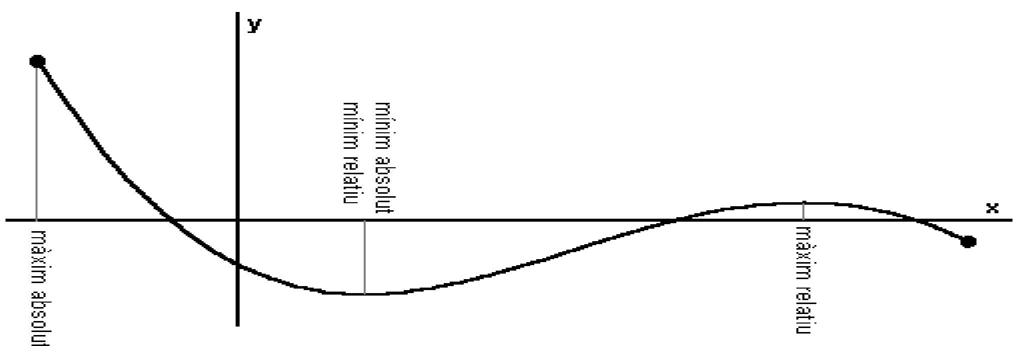
EXTREMS D'UNA FUNCIÓ.

Si tenim $\begin{aligned} f : [a,b] &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$ una funció real de variable real, llavors diem que:

$x_0 \in [a,b]$ és **màxim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \le f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes gran de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és **mínim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \ge f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes petit de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ **extrem absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow x_0$ és màxim o mínim absolut



$x_0 \in (a,b)$ és **màxim relatiu** de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$per x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes gran de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és **mínim relatiu** de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
Û $\exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes petit de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és **extrem relatiu** de f a $(a,b) \Leftrightarrow$ x_0 és màxim o mínim relatiu .

LÍMIT FUNCIONAL.

Si y=f(x) és una funció real de variable real i x_0 un nombre real, ens podem plantejar quina imatge tenen les x que estan aprop de x_0 , quin comportament tenen les imatges de x quan aquestes x "s'acostem a x_0".
La formalització lògica de paraules tant "innocents" com **apropar-se o acostar-se** és una tasca que no és gens simple i no ens la plantejarem enguany; donarem però la:

Idea de límit

Si y=f(x) és una funció real de variable real , direm que:
l és el límit de f(x) quan x tendeix a x_0 quan valors de x propers a x_0, tenen imatges properes a ***l*** , i en aquest cas ho expressem com $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Exemples

- Considerem la funció y=3x+5 i fem una taula de valors per veure que fan les imatges quant les x tenen valors propers a 2.

x	**y=3x+5**
1	8
1.5	9.5
1.7	10.1
1.8	10.4
1.9	10.7
1.95	10.85

x	**y=3x+5**
3	14
2.7	13.1
2.5	12.5
2.2	11.6
2.1	11.3
2.05	11.15

Observem que si les x tenen valors propers a 2, les imatges tenen valors propers a 11, per això direm que $\lim_{x\to 2}(3x+5) = 11$.

- Considerem la funció $y = \begin{cases} 2x & x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$ i fem una taula de valors per veure que fan les imatges quant les x tenen valors propers a 2.

x	**y**
1	2
1.5	3
1.7	3.4
1.8	3.6
1.9	3.8
1.95	3.9

x	**y**
3	-3
2.7	-2.7
2.5	-2.5
2.2	-2.2
2.1	-2.1
2.05	-2.05

Observem que quan les x tenen valors propers a 2, les imatges no s'apropen a cap valor determinat, ja que per una banda semblen apropar-se a 4, però per l'altra s'apropen a -2.
per tant diem que no existeix $\lim_{x\to 2} y$.
En aquest exemple veiem que:
si els valors que pren x són menors que 2, les imatges s'apropen a 4
si els valors que té x són majors que 2, les imatges s'apropen a -2
Aquest fet ens dona peu a parlar dels límits laterals i així diem que $\lim_{x\to 2+} y = -2$ i que $\lim_{x\to 2-} y = 4$.

LÍMITS LATERALS.

Donada f funció real de variable real, $l \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, diem que:

***l* és el límit lateral per la dreta** quan x tendeix x_0 de f(x)$\Leftrightarrow$ $l = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

quan ens apropem a x_0 a partir de x majors que x_0, les imatges s'apropen a *l*.

Anàlogament es defineixen els límits laterals per l'esquerra.

l és el **límit lateral per l'esquerra** quan x tendeix x_0 de f(x) $\Leftrightarrow l = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

Es compleix la següent propietat:

$$\exists l = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists l' = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) \\ \exists l'' = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \end{cases} \text{ i } \quad l' = l'' = l$$

És a dir:

Existeix límit funcional $\Leftrightarrow$ existeixen límits laterals i coincideixen.

ÀLGEBRA DE LÍMITS.

El càlcul pràctic de límits, es fonamenta en les propietats: on f , g $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$, vàlides tant per límits laterals, com per a límits funcionals; sempre iqual existèixin tots i cadascun dels termes que hi apareixen.

El límit d'una constant és la constant.

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

El límit d'una suma és la suma dels límits.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

El límit d'un producte és el producte dels límits.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

El límit d'un quocient és el quocient dels límits.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

El límit d'una potència és la potència del límit:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^{\alpha} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^{\alpha}$$

El límit d'una exponencial és l'exponencial del límit:

$$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[g(x)^{f(x)} \right] = \left[\lim_{x \to x_0} g(x) \right]^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

Amb aquestes propietats resolem la major part dels límits, però aplicar-les sense fer les comprovacions d'existència, que resulten molt feixugues i per tant normalment ens saltem, provoca l'aparició del que se'n diuen indeterminades.

El tema de les indeterminades no el tractarem aquest any, sols donarem el valor d'una concreta que dona lloc a un número real força especial , número ***e***. que és $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ i aproximadament val 2.7182818... .

CONCEPTE DE FUNCIÓ CONTÍNUA.

Sigui y=f(x) funció real de variable real i $x_0 \in dom(f)$, llavors diem que :
f és **contínua** en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ **és el mateix fer el límit que substituir**

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f(x_0) \\ \exists l' = \lim_{x\to x_0+} f(x) \\ \exists l'' = \lim_{x\to x_0-} f(x) \end{cases} \text{ i } l' = l'' = f(x_0) \ .$$

Intuïtivament, una funció és contínua a x_0, si quan apropem les x a x_0, les imatges s'acosten a $f(x_0)$ i per tant, es pot dibuixar el gràfics de la funció sense aixecar el llapis del paper.

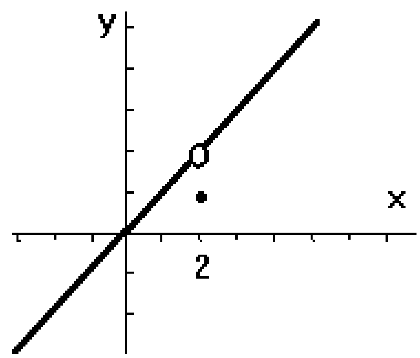
DISCONTINUÏTATS.

Sigui $f: A \longrightarrow R$ real de variable real i $x_0 \in A$, diem que:
x_0 és una **discontinuïtat** de f $\Leftrightarrow$ f no contínua en x_0.
Les discontinuïtats les podem classificar en:

- **Evitables**:
  x_0 és discontinuïtat evitable de y=f(x) $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ existeix $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Exemple:

$$y = \begin{cases} x & \text{quan } x\neq 2 \\ 1 & \text{quan } x=2 \end{cases}$$ té una discontinuïtat evitable en el 2 , ja que $y(2)=1$ i $\lim_{x\to 2} y = 2$



- **De Salt**: x_0 és discontinuïtat de salt $\Leftrightarrow$
  existeixen límits laterals i són diferents $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x)$

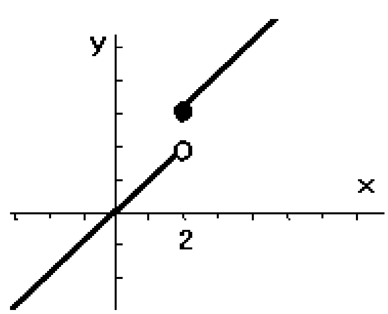
Per exemple $$y = \begin{cases} x & \text{per } x<2 \\ x+1 & \text{per } x\geq 2 \end{cases}$$ té una discontinuïtat de salt en x=2.

ja que:

$$\lim_{x\to 2-} y = \lim_{x\to 2} x = 2$$

$$\lim_{x\to 2+} y = \lim_{x\to 2} x+1 = 3$$

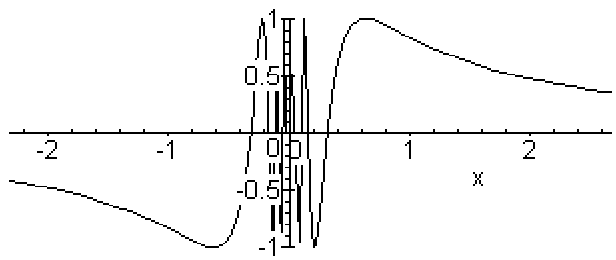
i aquests límits són diferents.



- **De segona espècie**:

  x_0 és discontinuïtat de 2^a espècie $\Leftrightarrow$ no existeix algun dels límits laterals.

  Exemple:
  La funció $y=\sin(1/x)$, té una discontinuïtat de 2^a espècie en $x=0$, ja que no existeix aquest límit.



  Dintre de les discontinuïtats de segona espècie, trobem les discontinuïtats **asimptòtiques**, que es produeixen si algun dels límits laterals és $\pm\infty$.

OPERACIONS AMB FUNCIONS CONTINUES.

De cursos anteriors sabem que a intervals oberts

Les funcions constants són contínues: $f(x) = k \Rightarrow f$ contínua a qualsevol x_0 .

La suma de contínues és contínua: f i g contínues en $x_0 \Rightarrow f+g$ contínua en x_0 .

El producte de contínues és contínua: f i g contínues en $x_0 \Rightarrow f\cdot g$ contínua en x_0 .

El quocient de contínues és contínua excepte quan el denominador és 0:

f i g contínues en x_0 i $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(x)$ contínua en x_0.

La potenciació de contínues:

$f(x)$ contínua en $x_0 \Rightarrow \left(f(x)\right)^n$ és contínua en x_0.

La composició de contínues és contínua.

f contínua en x_0 i g contínua en $f(x_0) \Rightarrow g\circ f$ contínua en x_0 .