Nombres Complexos

Necessitat d'ampliar els reals.

Amb els nombre reals, sempre podem realitzar sumes i productes essent el resultat un altre nombre real; però quan parlem de radicals, ens trobem que no sempre podem realitzar-los.
De fet si ens plantegem l'equació $x^2+1=0$, veiem que al hora de resoldre-la hem de fer $x^2=-1$. Que no pot tenir solució real, ja que cap nombre real al quadrat pot donar negatiu.
Per aquesta raó necessitem ampliar el nostre conjunt de nombres per tal que aquestes equacions tinguin solució.

Definició de complexos .

Per tal de solventar el problema que hem constatat abans, definim la **unitat imaginaria** com aquell nombre que elevat al quadrat dona -1, és a dir:

$i^2 = -1$ o si es prefereix $i = \sqrt{-1}$.

I a partir d'aquí, definim els complexos com aquelles expressions que es poden posar de la forma **z = a + bi** on a i b són reals.

És a dir $\boldsymbol{C}=\{ z = a + bi \mid a , b \in \boldsymbol{R}\}$

Algunes observacions:

Un nombre complex $z = a+bi$ queda determinat al conèixer els valors a i b, per aquest motiu sovint es donen els complexos en la forma (a,b) .

Quan ens referim als complexos com $z = a + bi$ diem que el donem en la forma **bionòmica** , mentre que quan ens referim al complex com a $z=(a,b)$ diem que l'hem donat en la forma **cartesiana**.

Quan tenim un complex $z = a+b\,i$, anomenem:

Part real de z = **Re** z = a

i

Part Imaginària de z = **Im** z = b.

La condició per que dos complexos siguin iguals és que les seves parts reals siguin iguals i que les seves parts imaginaries siguin iguals.

És a dir $z = a + b\,i \quad z' = a' + b'\,i$

$z = z' \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = \mathbf{Re}\, z' \text{ i } \mathbf{Im}\, z = \mathbf{Im}\, z'$

És obvi que els complexos amb part imaginària 0, són nombres reals, amb el què hem ampliat el nostre conjunt numèric. $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Dos complexos amb la mateixa part real i parts imaginaries oposades es diu que són **complexos conjugats**. Si un és $z = a + bi = (a,b)$, el seu conjugat és $\bar{z} = a - bi = (a,-b)$; per exemple si $z = 3 + 5i \quad \bar{z} = 3 - 5i$.

Exemple:

Si ens plantegem resoldre l'equació de segon grau $x^2 + x + 1 = 0$.

tenim que $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

i fins ara ens limitàvem a dir que no era un nombre real i que per tant no tenia solució.
amb aquests nous nombres, podem dir que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

és a dir que té dues solucions, $x_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ i $x_2 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$.

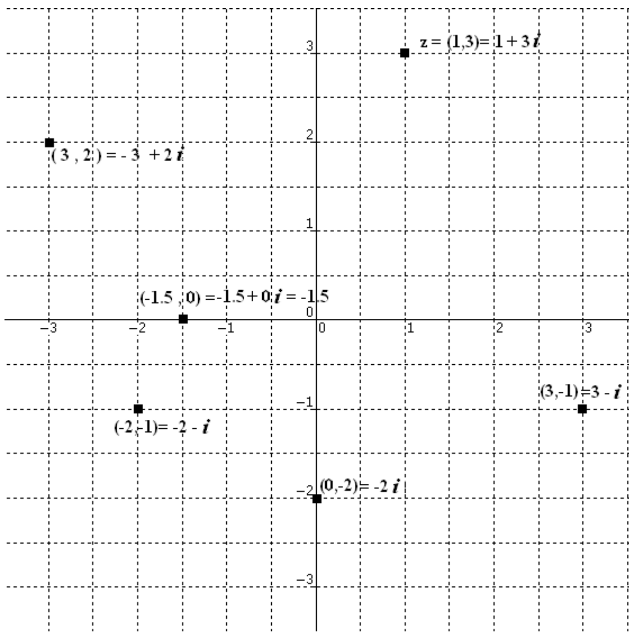
(Observeu que són complexos conjugats)

Representació gràfica dels complexos.

Com a cada complex z= a + b *i* li hem fet correspondre un parell ordenat (a,b) i com fixats uns eixos de coordenades podem identificar cada parell ordenat de reals amb un únic punt del pla, podrem identificar cada nombre complex amb un punt del pla que en diem el seu **afix**

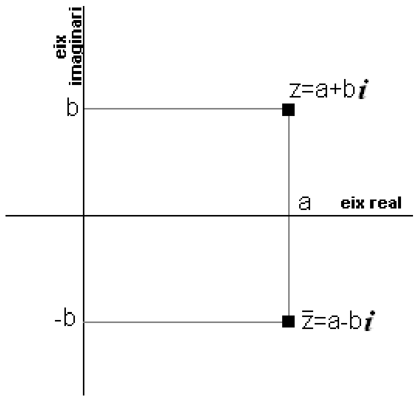
I al reves donat un punt del pla, de coordenades (a,b). sempre podem associar-li de forma única el complex z = a + b ***i*** .

Per exemple:



Per aquesta raó parlem del pla complex.

Com els nombres reals tenen la forma z= a+ 0***i*** estaran a l'eix que normalment situem horitzontal, d'aquest eix en diem l'**eix real** .
Com els nombres que tenen part real 0, tenen la forma z = 0 + b ***i***, estan situats a l'eix vertical que per això s'acostuma a anomenar **eix imaginari**.
Observeu que dos complexos conjugats, són simètrics respecte de l'eix real.



Operacions amb complexos.

Suma de complexos.

Si tenim dos complexos $z_1=a+b\ i$, $z_2=c+d\ i$, definim la suma z_1+z_2 com el complex que té de part real la suma de les parts reals i com a part imaginària la suma de les parts imaginàries.

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i=(a+c\ ,\ b+d).$$

Com a, b, c i d són reals és relativament senzill de comprovar les següents **propietats** de la suma de complexos:

Donats $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
$\mathbf{z_1+z_2 \in \mathbb{C}}$
Associativa: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)=z_1+z_2+z_3$
Commutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1$.
∃ element neutre (0): 0 es el element neutre ja que $z + 0 = z$.
∃ element oposat: -z es el oposat de z, ja que $-z + z = 0$.

Producte de complexos.

Si tenim dos complexos $z_1=a+b\boldsymbol{i}$, $z_2=c+d\boldsymbol{i}$, definim el producte de $z_1 \cdot z_2$ com el complex

$$z_1 \cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i=(ac-bd\ ,\ ad+bc)$$

Observeu que és del tot coherent definir el producte d'aquesta forma, ja que si multipliquem dues expressions numèriques $(a+bi)\cdot(c+di)$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd\cdot i^2=$$

com $i^2=-1$

$$=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd(-1)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$$

Com a, b, c i d són reals és relativament senzill de comprovar les següents **propietats** del producte de complexos:

$\mathbf{z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}}$
Associativa: $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=z_1\cdot z_2\cdot z_3$

Commutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

∃ element neutre (1): 1 es el element neutre ja que $z \cdot 1 = z$

∃ element invers:

Si $z = a + b\boldsymbol{i}$ $z \neq 0$ el seu invers és $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\boldsymbol{i}$.

ja que

N'hi ha prou en fer el producte i veure que el resultat és 1.

$$z \cdot z^{-1} = (a + b\boldsymbol{i}) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\boldsymbol{i} \right)$$

per la definició de producte de complexos

$$z \cdot z^{-1} = \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} \right) + \left(a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right) \cdot \boldsymbol{i}$$

i operant

$$z \cdot z^{-1} = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) + \left(\frac{-a \cdot b}{a^2+b^2} + \frac{b \cdot a}{a^2+b^2} \right) \cdot \boldsymbol{i}$$

És a dir

$$z \cdot z^{-1} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + 0 \cdot \boldsymbol{i} = 1 \ .$$

Propietat distributiva del producte respecte de la suma

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Divisió de complexos:

Podem platejar el quocient de dos complexos, de dues formes totalment equivalents:

- Dividir no és altra cosa que multiplicar per l'invers amb el què

  Per calcular $\dfrac{2+3\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}}$, en hi ha prou en $\dfrac{2+3\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}} = (2+3\boldsymbol{i}) \cdot \dfrac{1}{-2+\boldsymbol{i}}$

  i per tant

$$\frac{2+3\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}} = (2+3\boldsymbol{i}) \cdot \frac{-2-\boldsymbol{i}}{(-2)^2+1^2} =$$

$$= \frac{(2+3\boldsymbol{i}) \cdot (-2-\boldsymbol{i})}{5} = \frac{2 \cdot (-2) - 3(-1) + (3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1))\boldsymbol{i}}{5} =$$

$$= \frac{-4+3+(-6-2)\boldsymbol{i}}{5} = \frac{-1-8\boldsymbol{i}}{5} = \frac{-1}{5} + \frac{-8}{5}\boldsymbol{i}$$

- Si tenim en compte que $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$, podem plantejar-nos el quocient de dos complexos com una racionalització.

  És a dir: si volem calcular $\dfrac{2+3\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}}$, n'hi ha prou en multiplicar i dividir pel conjugat del denominador.

  És a dir:

$$\frac{2+3\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}} = \frac{(2+3\boldsymbol{i}) \cdot (-2-\boldsymbol{i})}{(-2+\boldsymbol{i}) \cdot (-2-\boldsymbol{i})} = \frac{-4-3(-1)+(3 \cdot (-2)+2 \cdot (-1))\boldsymbol{i}}{4-\boldsymbol{i}^2} = \frac{-1-8\boldsymbol{i}}{5} \ .$$

Potències de la unitat imaginària.

Ens plantegem trobar el valor de $\boldsymbol{i}^n$.
Per això realitzarem uns quans casos senzills per poder veure el seu funcionament.

Si n = 0 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^0 = 1$.
Si n = 1 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$.
Si n = 2 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -1$.
Si n = 3 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -1 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$.

Si n = 4 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -1 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -(-1) = 1$.
Si n = 5 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$.
Si n = 6 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^6 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.
Si n = 7 $\Rightarrow \boldsymbol{i}^7 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^3 = 1 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i}$.

...

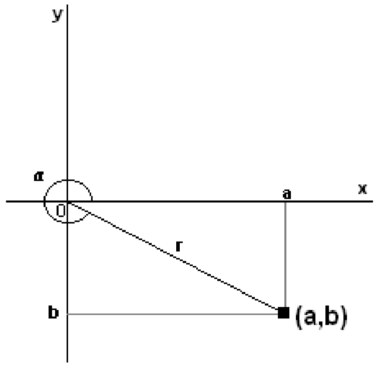
Per trobar $\boldsymbol{i}^n$
fem la divisió de n entre 4

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & k \end{array}$$

per la prova de la divisió n = 4 · k + r on r = 0 , 1 , 2 , 3

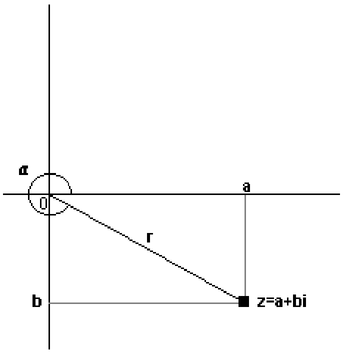
amb què $\boldsymbol{i}^n = \boldsymbol{i}^{4 \cdot k + r} = \boldsymbol{i}^{4 \cdot k} \cdot \boldsymbol{i}^r = 1 \cdot \boldsymbol{i}^r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ \boldsymbol{i} & r = 1 \\ -1 & r = 2 \\ -\boldsymbol{i} & r = 3 \end{cases}$

Forma polar dels complexos.



Quan introduíem la representació gràfica dels complexos, veiem que els podíem identificar amb els punts del pla. Està clar que un punt del pla ve determinat per la seva distància a l'origen de coordenades i l'angle que formen a la recta que l'uneix amb l'origen i l'eix OX.

Amb el que si tenim un complex $z = a + b\boldsymbol{i} \neq 0$, quedarà determinat per la seva distància a l'origen i per l'angle que forma el segment O z amb el semieix OX.



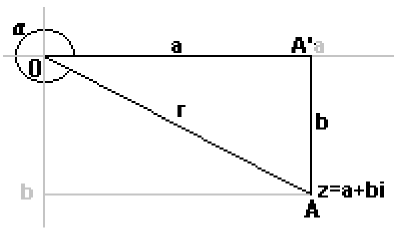
Per aquesta raó si anomenem **mòdul** al valor $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ i **argument principal** a l'angle que formen el segment Oz i el semieix OX . $\alpha \in [0,2\pi)$.

El complex $z = a + b\boldsymbol{i}$ el podem identificar amb el seu mòdul i el seu argument principal .

Quan un complex el donem a partir del seu mòdul i de l'argument principal **$z= r_\alpha$.** diem que està en la **forma polar.**

Algunes observacions

Si tenim un complex $z = a + b\boldsymbol{i} \neq 0$ i anomenem A al punt del pla que és el seu afix,



Està clar que si el triangle OAA', és rectangle en el vèrtex A' , i per tant

$a = r \cdot \cos \alpha$

i

$b = r \cdot \sin \alpha$

amb el que el complex $z = a + b \cdot i$ el podem expressar com $z= r \cdot \cos \alpha + i \cdot r \cdot \sin \alpha = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, que en diem la **forma trigonomètrica** del complex.

Si bé a nivell numèric no té diferències amb la forma bionòmica, aquesta forma d'expressar els complexos, ens permet deduir moltes propietats de la forma polar.

Exemple:

Passem el complex $z = 1- \boldsymbol{i}$ a la forma polar.

el seu mòdul és $r= |1- \boldsymbol{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$$\text{com} \quad \begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cdot \cos\alpha \\ -1 = \sqrt{2} \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

Per tant $z = 1- \boldsymbol{i} = \sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$.

Propietats en la forma polar.

$$z = r_\alpha \Rightarrow \bar{z} = r_{-\alpha}$$

ja que $z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\cdot \sin\alpha) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha) =$

$= r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin(-\alpha)) = r_{-\alpha}$

$$z = r_\alpha \Rightarrow -z = r_{\alpha+\pi}$$

ja que $z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\cdot \sin\alpha) \Rightarrow -z = r(-\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha) =$

$= r\cdot(\cos(\alpha+\pi) + i\cdot\sin(\alpha+\pi)) = r_{\alpha+\pi}$

$$z = r_\alpha \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

ja que

$$z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)}\frac{(\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha)}{(\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha}{r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \frac{\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha) = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\cdot\sin(-\alpha)) = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

$$\mathbf{r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}}$$

ja que

com $r_\alpha = r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ i $s_\beta = s\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$

$r_\alpha\cdot s_\beta = r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot s\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) =$

$= r\cdot s\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta + i\cdot(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta)) =$

$= r\cdot s\cdot(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)) = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}$

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

ja que

com $r_\alpha = r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ i $s_\beta = s\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = r_\alpha\cdot\frac{1}{s_\beta} = r_\alpha\cdot\left(\frac{1}{s}\right)_{-\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

$$\boxed{\left(r_{\alpha}\right)^{n} = r^{n}_{n\alpha}}$$

ja que

$$\left(r_{\alpha}\right)^{n} = r_{\alpha}\cdot r_{\alpha}\cdot\ldots\cdot r_{\alpha} = (r\cdot r\cdot\ldots\cdot r)_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = \left(r^{n}\right)_{n\cdot\alpha}$$

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha}{n}+\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n}}$$ **amb k =0,1,...n-1**

ja que

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}} = s_{\beta} \Leftrightarrow \left(s_{\beta}\right)^{n} = r_{\alpha}$$

és a dir

$s^{n}{}_{n\beta} = r_{\alpha}$

com dos complexos en la forma polar són iguals ⇔

⇔ els seus mòduls són iguals i els seus arguments són iguals excepte voltes.

$s^n = r$ i $n\beta = \alpha + 2\cdot k\cdot\pi$

amb el que:

$s = \sqrt[n]{r}$ i $\beta = \dfrac{\alpha + 2\cdot k\cdot\pi}{n}$

Observem que

ens dona un valor de β

.....

ens dona un valor de β

,

per k=0 $\Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{n}$

per k=1 $\beta = \dfrac{\alpha + 2\cdot\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\cdot\pi}{n}$

.....

per k=n-1 $\beta = \dfrac{\alpha + 2\cdot(n-1)\cdot\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\cdot(n-1\cdot\pi}{n}$

per k=n $\beta = \dfrac{\alpha + 2\cdot n\cdot\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + 2\cdot\pi$,

que és el mateix valor que per k=0 mes una volta sencera i per tant serà el mateix complex.

Exemple

Trobem les arrels cúbiques de -8.
De fet, estem buscant tots els complexos z, que verifiquen $z^3=-8$.

Com $-8=8_\pi$ tindrem que $z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_\pi}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}}=2_{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}}$ k=0,1,2 .

Per k=0 $z=2_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}}=2_{\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\cdot\sqrt{3}$

Per k=1 $z=2_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}}=2_{\frac{3\pi}{3}}=2(\cos\pi+i\cdot sin\pi)=2(-1+i\cdot 0)=-2$

Per k=2 $z=2_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}}=2_{\frac{5\pi}{3}}=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot sin\frac{5\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2})=1-i\cdot\sqrt{3}$