BREU RESUM DE COMBINATÒRIA.

VARIACIONS ORDINÀRIES.

Donats $A=\{a_1,..,a_n\}$ un conjunt amb n elements i $B=\{b_1,...,b_m\}$ un conjunt amb m elements, anomenem **variacions de m elements presos de n en n**, a cada una de les aplicacions injectives del conjunt A en el conjunt B.

Una altra definició és: anomenem **variació ordinària de m elements presos de n en a, a cada una de les agrupacions de n elements, tenint en compte que dues agrupacions són diferents $\Leftrightarrow$ tenen elements diferents i/o estan en ordres diferents.**

El nombre de variacions ordinàries de m elements presos de n en n es representa amb el símbol $V_{m,n}$, i val:

$$V_{m,n} = m\,(m-1)\,(m-2)\ ...\ (m-n+1)$$

PERMUTACIONS ORDINÀRIES.

Donat $A=\{a_1,...,a_n\}$ un conjunt amb n elements, anomenem **permutació de n elements** , a cada una de les aplicacions bijectives del conjunt A en sí mateix.
Com tota aplicació injectiva entre conjunts amb n elements és automàticament bijectiva, i tota aplicació bijectiva és sempre injectiva, tindrem que les permutacions de n elements coincideixen amb les variacions de n elements presos de n en n.

O mes simplement: **una permutació de n elements és cada una de les agrupacions que podem formar amb tots ells, tenint en compte que dues agrupacions són diferents $\Leftrightarrow$ estan ordenades de diferent manera.**

El nombre de permutacions ordinàries de n elements es representa per P_n , i val :

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\ ...\ 1 = n!$$

COMBINACIONS ORDINÀRIES.

Donat $B=\{b_1,...,b_m\}$ un conjunt amb m elements i $n \leq m$, anomenem **combinacions de m elements presos de n en n** , a cada un dels subconjunts de n elements que es poden formar amb els elements de B.

O bé: **combinació de m elements presos de n en n , és cada una de les agrupacions de n elements que podem formar amb els m inicials, tenint en compte que dues agrupacions són diferents $\Leftrightarrow$ tenen elements diferents .**

Observeu que, en les combinacions, **no compte l'ordre**.
El nombre de combinacions ordinàries de m elements presos de n en n es representa amb el símbol C_n^m , i val:

$$C_n^m = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

VARIACIONS AMB REPETICIÓ.

Donats $A=\{a_1,...,a_n\}$ un conjunt amb n elements i $B=\{b_1,..,b_m\}$ un conjunt amb m elements, anomenem **variacions amb repetició de m elements presos de n en n** a cada una de les aplicacions del conjunt A en el conjunt B.

També les podem definir en la forma següent: **una variació amb repetició de m elements presos de n en n és cada una de les agrupacions dels m elements, tenint en compte que es poden repetir i que dues agrupacions són diferents ⇔ tenen elements diferents i/o estan en ordres diferents.**

El nombre de variacions amb repetició de m elements presos de n en n el representem per $VR_{m,n}$ i val :

$$VR_{m,n} = m^n .$$

PERMUTACIONS AMB REPETICIÓ.

Donat $A=\{a_1,...,a_n\}$ un conjunt amb n elements, de manera que n'hi ha k_1 elements iguals , k_2 elements iguals ,..., i k_p elements iguals $k_1+k_2+..+k_p = n$), anomenem **permutació dels n elements repetint-se $k_1,k_2,..,k_p$ vegades , a cada una de les agrupacions que podem formar amb tots els n elements, tenint en compte que dues agrupacions són diferents ⇔ elements diferents estan en ordres diferents.**

Si $A=\{a_1,...,a_n\}$, les agrupacions que inicialment podem fer amb tots ells és n!, però si hi ha k_1 elements que no es poden distingir, caldrà excloure les agrupacions que surten de permutar entre ells aquests k_1 elements, i ens queda que si k_1 elements són indistingibles el nombre de permutacions és de:

$$\frac{n!}{k_1!} .$$

Si repetim el raonament pels altres elements coincidents, obtenim que:

$$PR^{k_1,k_2,...k_p} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_p!} .$$

ÀLGEBRA DELS ESDEVENIMENTS ALEATORIS.

EXPERIMENT ALEATORI.

És tota prova que podem repetir sota les mateixes condicions, però que no en podem predir el resultat.

Exemples

- tirar una moneda i mirar que surt.
- tirar dos daus i sumar els punts resultants.
- extreure una carta d'una baralla.

ESPAI MOSTRAL.

A tot experiment aleatori li, podem associar el conjunt format pels resultats que pot tenir l'experiment; d'aquest conjunt en diem espai mostral i el seu símbol és E o Ω.

Exemples

- a l'experiment "tirar una moneda" E={cara,creu}
- a l'experiment "tirar un dau" E={1,2,3,4,5,6}

ESDEVENIMENT ALEATORI.

S'anomena esdeveniment a qualsevol subconjunt de l'espai mostral d'un experiment. Així doncs, els esdeveniments són elements del conjunt de parts de E = $\wp$(E).

Exemples:

- si "tirem un dau", alguns dels esdeveniments són:
  "treure imparell" = I = {1,3,5} ; "treure parell" = P = {2,4,6} ;
  "treure 2 o 3" = {2,3} .
- si "tirem dues monedes", alguns dels esdeveniments són:
  "dues cares" ={c,c} ; "dues creus" ={+,+} ; "cara i creu" ={c,+} .

ESDEVENIMENT ELEMENTAL,

És aquell esdeveniment que està format per un sol element de l'espai mostral.
Per exemple, si "tirem un dau" els successos elementals són: "treure 1"={1}, "treure 2"={2} , "treure 3"={3}, "treure 4"={4}, "treure 5"={5} , "treure 6"={6} .

ESDEVENIMENT COMPOST.

És tot esdeveniment que està format per més d'un element. Observeu que tot esdeveniment compost es pot expressar com a unió d'esdeveniments elementals.

Exemple:

Quan tirem un dau, "treure imparell" és $I=\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}$.

ESDEVENIMENT SEGUR I ESDEVENIMENT IMPOSSIBLE.

Anomenem esdeveniment **segur**, a aquell esdeveniment que sempre es verifica. L'esdeveniment segur està format per la unió de tots els esdeveniments elementals, i per això, el designarem per E.
De l'esdeveniment que no es verifica mai, en diem, **esdeveniment impossible** . No podrà contenir cap esdeveniment elemental, i per això, el representem amb $\emptyset$.

Exemple

Si tirem una moneda, l'esdeveniment segur és E="treure cara o creu" ={c,+}; i l'esdeveniment impossible és $\emptyset$="no treure ni cara ni creu".

RELACIÓ ENTRE ESDEVENIMENTS.

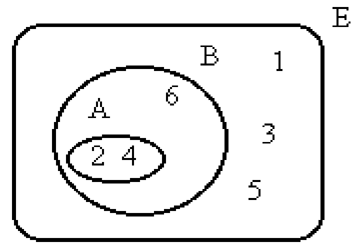
Hem identificat els esdeveniments amb els subconjunts de E, i per tant les relacions entre esdeveniments seran les mateixes que entre conjunts.

INCLUSIÓ.

Donats A i B dos esdeveniments associats a un experiment aleatori, direm que:
A està contingut o **inclòs** en B $\Leftrightarrow$ $A \subset B$ $\Leftrightarrow$ tot element de A és de B $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ sempre que es verifica A es verifica B.

Exemple

a l'experiment "tirar un dau", l'esdeveniment A="treure 2 o 4" = {2,4} és inclòs a l'esdeveniment B="treure parell".



IGUALTAT.

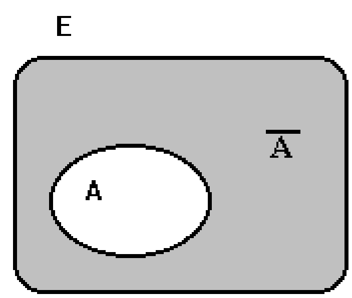
Direm que dos esdeveniments A i B són iguals $\Leftrightarrow$ $A = B$ $\Leftrightarrow$ $A \subset B$ i $B \subset A$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ sempre que es verifica A es verifica B i sempre que es verifica B es verifica A $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ A i B tenen els mateixos esdeveniments elementals.

CONTRARIS O COMPLEMENTARIS.

Donat un esdeveniment A, definim el complementari de A com aquell esdeveniment que es verifica, $\Leftrightarrow$ no es verifica A .

El contrari de A, s'escriu en la forma E\A o $\overline{A}$.
$\overline{A}$ està format per tots els successos elementals que no són de A.

Per exemple a l'experiment "tirar un dau"
A="treure 2 4"={2, 4}
$\overline{A}$ = "no treure ni 2 ni 4"={1,3,5,6} .



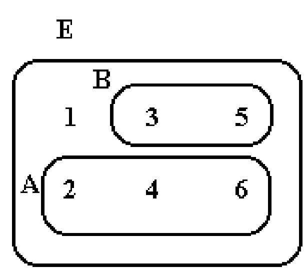
INCOMPATIBLES.

Dos esdeveniments A i B es diuen incompatibles $\Leftrightarrow$ no es poden verificar simultàniament $\Leftrightarrow$ $A \subset E\backslash B$ o $B \subset E\backslash A$ $\Leftrightarrow$ A i B no tenen esdeveniments elementals en comú.

Observeu que dos esdeveniments elementals sempre són incompatibles.

Exemple:

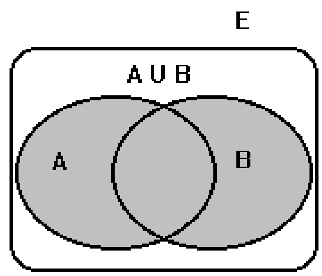
a l'experiment "tirar un dau",
A="treure parell"={2,4,6} B="treure 3 o 5"={3,5}
són incompatibles, però no contraris.



OPERACIONS AMB ESDEVENIMENTS.

UNIÓ.

Donats A i B, dos esdeveniments, anomenem A unió B = $A \cup B$ a l'esdeveniment que es verifica $\Leftrightarrow$ es verifica A o es verifica B o els dos alhora.

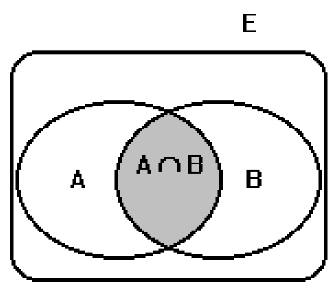


Exemple:

A l'experiment "tirar un dau", siguin
A="treure 1 o 2"= {1,2},
B="treure 2 o 3 o 4"= ={2,3,4} $\Rightarrow$
$A \cup B$ ="treure 1 o 2 o 3 o 4" = {1,2,3,4}.

INTERSECCIÓ D'ESDEVENIMENTS.

Donats A i B, dos esdeveniments, anomenem A intersecció amb B i ho designem per $A \cap B$, a l'esdeveniment que es verifica $\Leftrightarrow$ es verifiquen A i B .



$A \cap B$ està format pels esdeveniments elementals que són simultàniament dins el conjunt A i dins el conjunt B.
Per exemple, a l'experiment "tirar un dau", siguin
A="treure 1 o 2"= {1,2},
B="treure 2 o 3 o 4"= {2,3,4}
$\Rightarrow$ $A \cap B$ = "treure 2" ={2} .

Observeu que:
dos esdeveniments són A i B incompatibles $\Leftrightarrow$ tenen intersecció buida $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$.

PROPIETATS DE LA UNIÓ I LA INTERSECCIO

- **Associatives:**
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Commutatives:**
  $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
- **Idempotència:**
  $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
- **Lleis de simplificació:**
  $A \cup (B \cap A) = A$ i $A \cap (B \cup A) = A$
- **Distributives:**
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Lleis de Morgan:**
  $E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$ $E \backslash (A \cap B) = (E \backslash A) \cup (E \backslash B)$
- **Relació amb $\emptyset$ i E :**
  $A \cup \emptyset = A$ i $A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ i $A \cap E = A$

Així doncs, els esdeveniments associats a un experiment aleatori, amb les operacions unió i intersecció, tenen estructura d'àlgebra de Boole.

FREQÜÈNCIES - LLEI DE L'ATZAR.

Realitzem una experiència N vegades, anomenem

Freqüència Absoluta de A, al nombre de vegades que s'ha verificat A = Fr abs (A) .

Freqüència relativa de A o simplement freqüència de A al valor :

$$fr(A) = \frac{n}{N} = \frac{Frabs(A)}{N}$$

Exemple:
Tirem 8 cops un dau i ens surten els següents resultats: 5,1,3,2,3,1,4 i 2 .
Si A = "treure 2 o 3" $\Rightarrow$ Fr abs(A) = 4 i fr(A) = 4/8 = 0.5 .

PROPIETATS DE LA FREQÜÈNCIA.

- **$0 \leq fr(A) \leq 1$.**
  Demostració:
  Sempre $0 \leq n \leq N \Rightarrow 0=0/N\leq n/N=fr(A)\leq N/N=1$.

- **fr(E) = 1 .**
  Demostració:
  Si E és l'esdeveniment segur $\Rightarrow$ E sempre es verifica $\Rightarrow$ Fr abs(E) = N
  $\Rightarrow fr(E) = \frac{N}{N} = 1$

- **A i B incompatibles ($A \cap B=\varnothing$) $\Rightarrow$ $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$.**
  Demostració:
  Siguin n , n' i n'' les respectives freqüències absolutes de A ,B i $A \cup B$, i N el nombre de cops que s'ha realitzat l'experiment.
  Per ser A i B són incompatibles $\Rightarrow$ A i B no es verifiquen simultàniament $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ n'' = n + n' .
  Per tant :

$$fr(A \cup B) = \frac{n''}{N} = \frac{n + n'}{N} = \frac{n}{N} + \frac{n'}{N} = fr(A) + fr(B)$$

LLEI DE L'ATZAR - CONCEPTE DE PROBABILITAT.

Si s'augmenta el número de vegades que es realitza un experiment, s'observa que, **la freqüència relativa de A s'estabilitza a l'entorn d'un cert número** ; d'aquest número en diem la probabilitat de l'esdeveniment A.

Exemple:
A 50 alumnes d'un curs de COU, els preguntem si els agrada "SAU". La resposta és de 45 SI i 5 NO.
Tenim que les freqüències relatives són: fr(SI) = 45/50 = 0.9 i fr(NO) = 5/50 = 0.1 .

Per tant si escollim un alumne de COU a l'atzar, "cal esperar amb probabilitat" 0.9 que li agradi "SAU".

PROBABILITAT.

La llei de l'atzar ens garanteix que la freqüència d'un esdeveniment s'estabilitzarà en un cert número; d'aquest número en diem probabilitat.
Hi ha però el problema, la freqüència és "a posteriori" i sovint ens interessa saber que passarà abans de realitzar l'experiment, per tal de poder fer-ne prediccions.
Cal buscar una altra definició de probabilitat, que sigui "a priori", de manera que puguem predir el que "segurament passarà abans de que passi".
Com la probabilitat és la freqüència, quan el número de proves és molt alt, és clar que la probabilitat complirà les tres propietats demostrades per la freqüència. Aprofitem aquest fet, per definir la probabilitat de manera axiomàtica, basant-nos en les propietats que hem vist de la freqüència.

AXIOMES DE LA PROBABILITAT.
Considerem una experiència, E el seu espai mostral i $\wp(E)$ els esdeveniments associats.
Anomenem **probabilitat** a tota aplicació

$$\mathbf{P}: \wp(E) \longrightarrow R$$
$$A \longmapsto P(A)$$

de manera que:

[p.1] $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$ **.**
[p.2] $\mathbf{P(E) = 1}$ **.**
[p.3] **A i B incompatibles** $\mathbf{(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ **.**

Del parell $(\wp(E),P)$ en diem un espai de probabilitat.

TEOREMES DEDUÏTS DELS AXIOMES.

TEOREMA I.

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ són esdeveniments dos a dos incompatibles ($i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$)

$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Demostració:

- Quan n=2 és l'axioma [p.3] de la probabilitat.
- Si suposem cert el teorema fins a n-1, comprovem que també és cert per n.

  Sigui $B = A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_{n-1}$

  llavors $B \cap A = (A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup .. \cup (A_{n-1} \cup A_n)$,

  però per tot $i \neq n$ $A_i \cap A_n = \varnothing \Rightarrow B \cap A_n = \varnothing \cup .. \cup \varnothing = \varnothing$

  $\Rightarrow$ B i A_n incompatibles.

  Per l'axioma 3 de la probabilitat $\Rightarrow P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n)$.

  Però per hipòtesi d'inducció

  $P(B) = P(A_1) + P(A_2) + .. + P(A_{n-1})$

  i per tant

  $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

TEOREMA II.

La probabilitat del contrari d'A és 1 - probabilitat de A.

és a dir: $P(E \backslash A) = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostració:

Per definició de $\overline{A}$ és evident que $A \cap (\overline{A}) = \varnothing$ i $A \cup (\overline{A}) = E$

amb el que pels axiomes [p.1] i [p.3]

$1 = P(E) = P(A \cup (\overline{A})) = P(A) + P(\overline{A})$

isolant $P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

TEOREMA III.

L'esdeveniment impossible té probabilitat zero. **$P(\varnothing) = 0$.**

Demostració:

Per ser l'esdeveniment impossible és el contrari de l'esdeveniment segur $\Rightarrow$

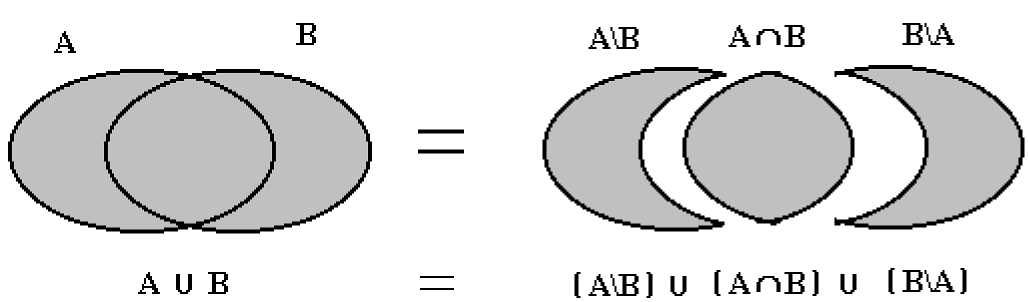
$\Rightarrow P(\varnothing) = P(E \backslash E) = P(E) - P(E) = 0$.

TEOREMA IV.

Si A i B són dos esdeveniments qualsevols $\Rightarrow$ **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$** .

Demostració:

Observem que : $A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$



Com: $(A\setminus B) \cap (A\cap B) = \varnothing$, $(A\cap B) \cap (B\setminus A) = \varnothing$ i $(A\setminus B) \cap (B\setminus A) = \varnothing$,
pel teorema I $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A\setminus B) + P(A\cap B) + P(B\setminus A)$. (1)

Però $A = (A\setminus B) \cup (A\cap B) \Rightarrow P(A) = P(A\setminus B) + P(A\cap B) \Rightarrow P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$
i $B = (B\setminus A) \cup (A\cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(B) = P(B\setminus A) + P(A\cap B) \Rightarrow P(B\setminus A) = P(B) - P(A\cap B)$.

I substituint a (1), obtenim:
$P(A\cup B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

TEOREMA V.

Si A i B són dos esdeveniments $\mathbf{A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$.
Demostració:
L'esdeveniment B es pot expressar en la forma $B = A \cup (B\setminus A)$
i es compleix que $A \cap (B\setminus A) = \varnothing$.
Per l'axioma [p.3] de la probabilitat $\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B\setminus A)$
però per [p.1] $P(B\setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

ESPAIS FINITS-EQUIPROBABLES. REGLA DE LAPLACE.

Un espai de probabilitat ($\wp$(E),p) es diu finit ⇔ el nombre d'esdeveniments elementals que té és finit $\wp$(E) és un conjunt finit.

Per exemple, "tirar un dau" és un espai de probabilitat finit, doncs E={1,2,3,4,5,6}; mentre que "escollir un numero real qualsevol" , no ho és ja que hi ha tant successos elementals com números reals.

Un espai de probabilitat finit és equiprobable ⇔ tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat.

Per exemple, "tirar un dau normal" té associat un espai equiprobable, mentre que "tirar un dau trucat perquè surti 4" no és equiprobable, l'esdeveniment elemental "4" té més probabilitat que l'esdeveniment elemental "5".

REGLA DE LAPLACE.

Sigui $E = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ un espai **finit i equiprobable**, A un esdeveniment d'aquest espai que conté k esdeveniments elementals ⇒ $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorable}}{\text{casos possibles}}$

Demostració:

Si $E = \{a_1,a_2,...,a_n\}$, tenim que $E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup .. \cup \{a_n\}$ i per ser els esdeveniments elementals dos a dos incompatibles ⇒

$$1 = P(E) = P(a_1) + P(a_2) +.. + P(a_n)$$

però, a un espai equiprobable, tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat ⇒ $1 = n\,P(a_i)$ ⇒ $P(a_i) = \frac{1}{n}$ (per tot i) .

Per altra banda, podem suposar que $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ i com els esdeveniments elementals són dos a dos incompatibles:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + .. + P(a_k) = k\,P(a_1) = \frac{k}{n}$$

Exemples:

- "Tirem un dau", quina és la probabilitat de que "sorti 5 o 6" ?
  L'espai mostral és E={1,2,3,4,5,6} ⇒6 casos possibles.
  L'esdeveniment "sortir 5 o 6" ={5} ∪ {6} ⇒2 casos fav.
  Per tant P("surt 5 o 6") = 2/6 = 1/3 .

- Si "tirem una dau i una moneda", quina és la probabilitat de que "surti cara i múltiple de 2" ?
  E={(1,c),(1,+),(2,c),(2,+), ... , (6,c),(6,+)}⇒ hi ha 6·2 = 12 casos possibles.
  "Sortir cara i múltiple de 2"={(2,c),(4,c),(6,c)} ⇒ hi ha 3 casos favorables.
  Per tant
  P("sortir cara i múltiple de 2") = 3/12 = 1/4 .

PROBABILITAT CONDICIONADA

Donats A i B dos esdeveniments associats a un experiment, definim la **Probabilitat de B condicionada a l'esdeveniment A, a la probabilitat de que es verifiqui B si ja s'ha verificat A**.
La probabilitat de B condicionada a A la representem per P(B/A).

Per exemple, si "tirem un dau" i sabem que ha "sortit parell" quina és la probabilitat de que sigui 2 ?
Siguin A="sortir parell"={2,4,6} i B="sortir 2"={2}.
Com sabem que ha sortit parell, podem prendre com a espai mostral el conjunt A , i per tant, P(B/A) = 1/3 .

TEOREMA VI.
Sigui E un espai de probabilitats finit i equiprobable .

A un esdeveniment tal que $P(A)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Demostració:
Si E està format per n esdeveniments elementals i
r=número esdeveniments elementals de A = "casos favor A" i
s=número esdeveniments elementals de B = "casos favor B" i
t=número esdeveniments elementals de $A\cap B$ = "casos favor $A\cap B$".
Per ser a un espai equiprobable,
$P(A)= r/n$ i $P(B)= s/n$ i $P(A\cap B) = t/n$.

Si sabem que s'ha verificat A hi ha t casos a favor de B i queden r casos possibles, per tant

$$P(B/A) = \frac{t}{r} = \frac{t/n}{r/n} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} .$$

Exemple:
"Tirem un dau" i sabem que ha "sortit parell" quina és la probabilitat de que sigui 2 ?

Siguin A="sortir parell"={2,4,6} i B="sortir 2"={2} llavors $A \cap B$ ={2} .
Per la regla de Laplace $P(A) = 3/6 = 1/2$ i $P(A\cap B) = 1/6$, amb el que

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} .$$

TEOREMA VII.
Si E és un espai mostral i A un esdeveniment $P(A)\neq 0$ l'aplicació

$$P(\cdot/A) : \wp(E) \longrightarrow R$$
$$X \longrightarrow \frac{P(A\cap X)}{P(A)}$$

és una probabilitat i en diem probabilitat condicionada a A.

Demostració:

Compleix [p.1]

$$0 = \frac{0}{P(A)} \le \frac{P(A \cap X)}{P(A)} \le \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \Rightarrow \quad 0 \le p(X/A) \le 1 .$$

Compleix [p.2]

Per ser $A \subset E \Rightarrow A \cap E = A$

$$P(E/A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \Rightarrow \quad P(E/A) = 1 .$$

Compleix [p.3]

Si B i C són incompatibles $\Rightarrow B \cap C = \varnothing \Rightarrow$

$(B\cap A) \cap (C\cap A) = B \cap C \cap A = \varnothing \cap A = \varnothing \Rightarrow$ $B\cap A$ i $C\cap A$ incompatibles.

I com $(B \cup C) \cap A = (B\cap A) \cup (C\cap A)$, tenim que:

$P((B \cup C)\cap A) = P(B\cap A) + P(C\cap A)$.

Per tant

$$P((B \cup C)/A) = \frac{P((B \cup C)\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)+P(C\cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} + \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = P(B/A) + P(C/A) \ .$$

Així doncs, compleix els tres axiomes de la probabilitat.

Nota

Sovint es defineix la probabilitat condicionada, a partir de la fórmula:

$P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ doncs acabem de veure que és una probabilitat.

COROL·LARI.

Si A i B són dos esdeveniments $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓ.

Si $A_1 ,A_2 ,...,A_n$ són n esdeveniments $A_i \in \wp(E)$ i=1,2,..,n

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2))\cdot P(A_4 /(A_1 \cap A_2 \cap A_3))\cdot ...$$
$$..\cdot P(A_n /(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})) \ .$$

Demostració:
La demostració del teorema de la multiplicació, la farem per inducció sobre n.
Quan n=2 és el corol lari anterior.

Suposem cert el teorema fins a n-1.

Sigui $B = A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}$.

Com el teorema és cert per n=2, tenim que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(B \cap A_n) = P(B) \cdot P(A_n / B) =$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}) \cdot P(A_n / (A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})) \quad . \quad (1)$$

Per la hipòtesi d'inducció:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdot .. \cdot P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-2}))$$

i substituint a (1) , també es compleix pel valor n.

Exemple:
En una urna hi ha 6 boles blanques i 3 boles negres. S'en treuen 5 sense reintegrar-les. Quina és la probabilitat de que les 5 boles siguin blanques?

Sigui A_i="bola i blanca" llavors, "Treure 5 blanques" = $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$.

Com $P(A_1)=6/9=2/3$, $P(A_2/A_1)=5/8$, $P(A_3/(A_1 \cap A_2))=4/7$,
$P(A_4/(A_1 \cap A_2 \cap A_3))=3/6=1/2$ i $P(A_5/(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4))=2/5$

pel teorema de la multiplicació

$$P(\text{"treure 5 blanques"}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{21} .$$

ESDEVENIMENTS INDEPENDENTS.

Donats A i B dos esdeveniments, diem que

A i B són independents $\Leftrightarrow$ P(A $\cap$ B) = P(A) $\cdot$ P(B) .

TEOREMA VIII.

A i B dos esdeveniments

A i B són independents $\Leftrightarrow$ P(A/B)=P(A) $\Leftrightarrow$ P(B/A)=P(B)

És a dir :

A i B independents $\Leftrightarrow$ la probabilitat d'un no queda modificada pel fet de verificar-se o no l'altre.

Demostració:

$\rightarrow$ Si A i B són independents $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad .$$

$\leftarrow$

$$\text{Si } P(A/B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

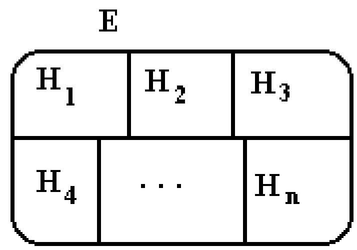
i per tant $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Observació: dos esdeveniments incompatibles amb probabilitat no nul·la, mai són independents.

CONCEPTE DE PARTICIÓ.

Una partició de l'espai mostral E, és una família d'esdeveniments $H_1, H_2, ..., H_n$ que compleixen les dues condicions següents:

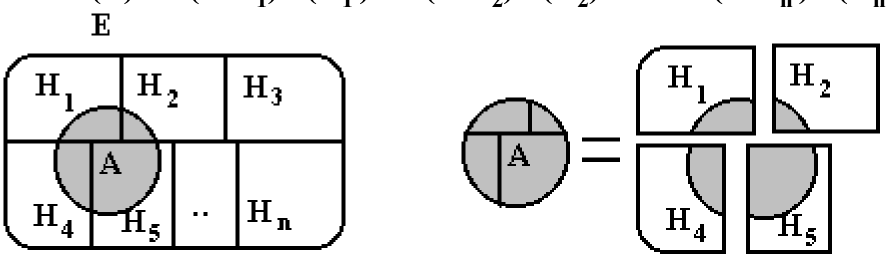
- són dos a dos incompatibles $H_i \cap H_j = \varnothing$ $(i \neq j)$
- la seva unió és l'esdeveniment segur $E = H_1 \cup H_2 \cup .. \cup H_n$



TEOREMA DE LA PROBABILITAT TOTAL.

Si $H_1, H_2, ..., H_n$ és una partició de E i A un esdeveniment qualsevol de E $\Rightarrow$

$$\mathbf{P(A) = P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + ... + P(A/H_n)\cdot P(H_n)}\ .$$



Demostració:

$P(A) = P(A\cap E) = P(A\cap(H_1 \cup H_2 \cup .. \cup H_n)) = P((A\cap H_1) \cup (A\cap H_2) \cup ... \cup (A\cap H_n)) =$

per ser les H_i incompatibles, tenim que:

$= P((A\cap H_1) + P(A\cap H_2) + ... + P(A\cap H_n)) =$

$\quad = P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + ... + P(A/H_n)\cdot P(H_n)$.

TEOREMA DE BAYES.

Si $H_1, H_2, ..., H_n$ és una partició de E , [$H_i \cap H_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ i $E=H_1 \cup H_2 \cup .. \cup H_n$]
i A un esdeveniment $\Rightarrow$

$$\mathbf{P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + ... + P(A/H_n)\cdot P(H_n)}} \qquad \mathbf{i = 1, 2 ,.. n}\ .$$

Demostració:

Per tot $i = 1, 2,.., n$

$P(A \cap H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A)$ i $P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$

per tant $P(A) \cdot P(H_i/A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$

isolant

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\qquad}\ .$$

P(A)

Substituint P(A) pel seu valor a partir del teorema de les probabilitats totals:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + ... + P(A/H_n)\cdot P(H_n)} \quad .$$

Exemple:

Tres amics A, B i C resolen una col·lecció de problemes.
A en fa el 50%, B el 30% i C el 20% . A equivoca el 3% dels problemes que ressol, B en el 4% i C en el 5% .
Escollim un problema a l'atzar, i està mal fet, quina és la probabilitat de que l'hagi resolt A ?

De l'enunciat, observem els successos amb probabilitats

A = " problema fet per A " $\Rightarrow$ P(A) = 1/2
B = " problema fet per B " $\Rightarrow$ P(B) = 3/10
C = " problema fet per C " $\Rightarrow$ P(C) = 1/5
M = " problema mal fet "
A fa malament el 3% dels problemes $\Rightarrow$ P(M/A)= 3/100
B fa malament el 4% dels problemes $\Rightarrow$ P(M/B)= 4/100
C fa malament el 5% dels problemes $\Rightarrow$ P(M/C)= 5/100

i volem calcular P(A/M).

Per ser tot "problema" fet per A, B o C i cap "problema" està resolt per dos senyors, tindrem que A , B i C formen una partició de l'espai mostral.

Pel teorema de Bayes

$$P(A/M) = \frac{P(A)\cdot P(M/A)}{P(A)\cdot P(M/A) + P(B)\cdot P(M/B) + P(C)\cdot P(M/C)}$$

Com P(M/A)=3/100 , P(M/B)=4/100=1/25 i P(M/C)=5/100=1/20

$$P(A/M) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{25} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}} = \frac{15}{37} \quad .$$