A.1.- Siguin $\vec{v} = (1,2,3)$ i $\vec{w} = (1,-1,1)$ dos vectors de R^3.

a) Decidiu si són dependents o independents.
b) Trobeu un vector $\vec{u}$ tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment independents.
c) Trobeu un vector $\vec{m}$ tal que $\vec{m}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment dependents.

A.2.- Calculeu tots els valors del paràmetre m, que fan linealment dependents els vectors: (1,1,m,2), (m,3,2,1) i (0,0,1,m).

A.3.- Justifiqueu que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, també ho són $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}+\vec{u}$ i $\vec{u}+\vec{v}$.

A.4.- Decidiu si el vector (-1,1,1,2) és combinació lineal de (1,0,1,1), (1,-1,0,1) i (0,0,1,-1).

A.5.- Decidiu si el vector (-1,1,1,2) és del subespai generat pels vectors: (1,0,1,1), (1,-1,0,1) i (0,0,1,-1).

A6.- Sigui $R_n[X]$ el conjunt dels polinomis amb coeficients reals i de grau menor o igual a n.
Demostreu que $R_n[X]$ és un R-espai vectorial.
Raoneu que els polinomis $P_j(x)=x^j$ $0\leq j \leq n$ són base de $R_n[X]$.

A.7.- Comproveu que $R_{n-1}[x]$ és subespai vectorial de $R_n[X]$.

A.8.- Considerem el conjunt $S=\{(x,y,z) \mid x=y=2z\}$, decidiu si és un subespai vectorial de R^3.

A.8.- Estudieu si els conjunts següents són subespais vectorials de R^4:

$S_1 =\{(x,y,z,t) / 3x=2y=5t\}$, $S_2 =\{(x,y,z,t) / x+z=y\}$,
$S_3 =\{(x,y,z,t) / z+t=2\}$, $S_4 =\{(x,y,z,t) / z+t=0\}$.

A9.- Per quins valors del paràmetre el vector (-1,2,5,a) és combinació lineal dels vectors (3,-2,-1,3) i (1,0,2,4) ?
Per quins valors del paràmetre a, el vector (-1,2,5,a) ésdel subespai generat per (3,-2,-1,3) i (1,0,2,4) ?

A10..- Per quins valors dels paràmetres a i b els vectors (1,4,a,b), (0,1,2,1) i (1,2,-1,2), són linealment dependents?.

Per quins valors dels paràmetres a i b el vector (1,4,a,b) és del subespai generat per (0,1,2,1) i (1,2,-1,2) ?

A.11.- Sigui $S=\{(x,y,z) / 2x+y-3z=0\} \subset R^3$.

a) Demostreu que S és un subespai vectorial.
b) Trobeu-ne una base de S i la seva dimensió.
c) Comproveu si el vector (2,5,3) és del subespai S, i en tal cas, expresseu-lo com combinació lineal de la base trobada.

A.12.- Trobeu un vector comú als subespais E_1 i E_2, si E_1 està generat per (1,2,3) i (3,2,1) i E_2 està generat per (1,0,1) i (3,4,3).

A.13.- Donats els vectors (p,-3,2), (2,3,p) i (4,6,-4), calculeu els valors del paràmetre p si sabem que generen un subespai de dimensió 1.

A.14.- Busqueu una base de la imatge de l'aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^3$ que té per

matriu: $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A.15.- Calculeu la matriu de l'aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^2$ definida per:

f(1,0,0)=(2,3) , f(0,1,0)=(1,8) i f(0,0,1) =(-2,6).

Trobeu la imatge de (1,1,1) per aquesta aplicació.

A.16.- Calculeu la matriu d'una aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^3$ si sabem que f(1,1,1)=(3,4,5), f(0,1,1)=(2,3,4) i f(0,0,1)=(3,3,0).

A.17.- Donada l'aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^3$ definida per

f(1,0,0)=(p+2,0,2) f(0,1,0)=(1,p,1) i f(0,0,1)=(p+1,0,1-p).

Trobeu per quins valors del paràmetre p, té una imatge de dimensió 2. Per aquets valors del paràmetre, trobeu una base de la Im f.

A.18.- Donades les aplicacions lineals $f:R^3 \longrightarrow R^3$, $(x,y,z) \to (y+z ,x+z,x+y)$ $g: R^3 \longrightarrow R^3$, $(x,y,z) \longrightarrow (y,-x+y-z,y)$

Trobeu les seves matrius. i calculeu la matriu de $f^{o}g$.

A.19.- Considerem l'aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^3$ definida per:

$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3p\vec{e}_3$.

Calculeu els valors de p si aquesta aplicació té una imatge de dimensió 2.

Per aquets valors de p, trobeu una base de la Img f.

A.20.- Resoleu les equacions següents:

a) $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos a & \cos a \\ 1 & \cos a & 1 & \cos a \\ 1 & \cos a & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$

A.21.- Demostreu que es compleix: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

A.22.- Siguin $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ i $\vec{e}_4$ una base d'un espai vectorial; i $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = p\vec{e}_2 + p\vec{e}_4$, $\vec{v}_4 = p\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ i $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$.

Calculeu per a quins valors de p els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ i $\vec{v}_4$ formen una base.

A.23.- Calculeu el valor de m si sabem que la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & m \end{pmatrix}$ té rang 2.

Per quins valors del paràmettre a els vectors (1,2,3),(2,4,6) i (1,2,m) generen un subespai de dimensió 2?

A.24.- Determineu per quins valors de p, els vectors $\vec{u}_1 = (p,0,2)$, ?$\vec{u}_2 = (1, p-2, 1)$) i $\vec{u}_3 = (-p+1, 0, p-3)$ generen un subespai de dimensió 2.

Per aquets valors de p, estudieu si el vector (0,1,-1) és del subespai generat.

A.25.- Determineu per quins valors de p, els vectors $\vec{u}_1 = (p+2,0,2)$, $\vec{u}_2 = (1,p,1)$ i $\vec{u}_3 = (p+1,0,-p+1)$ generen un subespai de dimensió 2.

Per aquets valors de p, doneu una base del subespai generat.

A.26.- Sabem que els vectors $\vec{u}_1 = (k,2,2)$, $\vec{u}_2 = (2,k,2)$ i $\vec{u}_3 = (2,2,k)$ generen un subespai vectorial de dimensió 2. Quin valor té el paràmetre k? Trobeu una base del subespai generat i expresseu, si es pot, el vector (0,-3,0) com combinació lineal de la base trobada.

A.27.- Una matriu idempotent és aquella matriu A tal que AA=A. Determineu el valor de a per tal que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ és idempotent.

A.28.- Estudieu la per quins valors del paràmetre, la matriu següent és invertible $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ p & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Per aquets valors calculeu el determinant de les matrius $M^{-1}M'$ i $M'M^{-1}$, on M' i M^{-1} són respectivament la transposasa i la inversa de M.

A.29.- Un valor propi d'una matriu A és un nombre real k tal que el determinant de A-kI (on I és la matriu identitat) és igual a zero. A partir d'aquesta definició, trobeu els valors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A.30.- Una matriu M és ortogonal $\Leftrightarrow$ el producte de M per la seva transposada M^t, és la identitat.
A partir d'aquesta definició esbrineu quines de les matrius següents són ortogonals:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A.31.- Raoneu que: M ortogonal $\Rightarrow$ det M = ± 1 .

A.32.- Resoleu, si és possible, el sistema següent: $\begin{cases} 12y^2 + 18z^2 = 1 \\ 16x^2 + 24z^2 = 1 \\ 24x^2 + 30y^2 = 1 \end{cases}$

A.33.- Determineu els valors del paràmetre, pels quals el sistema $\begin{cases} ax - ay + 3z = 0 \\ -x + 3y + az = 0 \end{cases}$, admet solucions diferents de la trivial que formen una progressió aritmètica.

A.34.- La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni associat a un cert sistema no homogeni és: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1.5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Resoleu el sistema no homogeni sabent que una solució és la (1,2,3).

A.35.- Raoneu que el sistema: $\begin{cases} x = by + cz + dt \\ y = ax + cz + dt \\ z = ax + by + dt \\ t = ax + by + cz \end{cases}$ té solució diferent de la trivial si i només si

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1 \ .$$