-Matemàtiques – II **PsPc. B2.A1.167-18**

1.- Trobeu els valors de a, b i c sabent que la funció $f(x) = \frac{ax+b}{cx+3}$ té per asímptotes les rectes $x = \frac{-1}{2}$ i $y = \frac{3}{2}$ i que la seva tangent en el punt d'abscissa -1 és la recta $7x + y + 9 = 0$.

$x = -\frac{1}{2}$ asímptota $\Rightarrow \lim_{x\to -1/2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to -1/2} cx+3 = 0 \Rightarrow c = 6$.

$y = \frac{3}{2}$ asímptota $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ a= 3·6/2 = 9 .

Com $f'(x) = \frac{a(cx+3)-c(ax+b)}{(cx+3)^2} = \frac{acx+3a-cax-cb}{(cx+3)^2} = \frac{3a-cb}{(cx+3)^2} = \frac{27-6b}{(6x+3)^2}$

Al ser la tangent en -1 la recta $7x + y + 9 = 0 \Rightarrow f'(-1) =$ pendent de la recta $\Rightarrow$

$f'(-1) = \frac{27-6b}{(-3)^2} = 3 - \frac{2}{3}b = -7 \Rightarrow -\frac{2}{3}b = -10 \Rightarrow b = 15$.

2.- Raoneu l'existència de solucions de l'equació $6x^3 + x^2 = 5 - x$.
En el cas que existeixin aproximeu-ne una amb un error menor a una dècima.

En primer lloc, considerem la funció $f(x)= 6x^3 + x^2 + x - 5$.
Com és un polinomi tenim que f és contínua i els zeros de f, coincidiran amb les solucions de l'equació.
Provem uns quan valors:
Com f(0)=-5<0 i f(1)=3>0 tenim que pel teorema de Bolzano,
existeix un punt $z\in(0,1)$ i f(z)=0; en altres paraules, entre 0 i 1 hi ha una solució de l'equació.

Com f(0.5)= -3.5 <0 i f(1)>0 $\Rightarrow$ pel teorema de Bolzano podem garantir que entre 0.5 i 1 hi ha una solució.

Com f(0.7)b = -1.752<0 i f(1)>0 $\Rightarrow$ solució entre 0.7 i 1.

Com f(0.8)= -0.488<0 i f(1)>0 $\Rightarrow$ solució entre 0.8 i 1

Com f(0.9)=1.084>0 i f(0.8)<0 $\Rightarrow$
solució entre 0.8 i 0.9 i l'error d'aproximació és menor a una dècima.

3.- Podem garantir l'existència de solucions de l'equació $1 + \cos x = x$ a l'interval [-2,2] ?
En cas afirmatiu, doneu una solució amb un error menor a una dècima.

El teorema de Bolzano, afirma que:
Si $f:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ **contínua** , **f(a) i f(b) tenen signes diferents**, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ existeix $c\in(a,b)$ de manera que f(c) = 0.

Per raonar l'existència de solucions de l'equació $x = 1 + \cos x$, considerarem la funció $f(x) = x - 1 - \cos x$; on és clar que els seus zeros coincideixen amb la solucions de l'equació $x = 1 + \cos x$.

Com f és un polinomi més un cosinus, és contínua a tots els reals i en particular f contínua a l'interval [-2, 2].
Com $f(-2)=-2-1-\cos(-2)<0$ i $f(2) = 2-1-\cos 2 >0$
podem doncs aplicar el teorema de Bolzano i per tant garantir l'existència d'una solució a l'interval (-2,2)

Aproximeu aquesta solució amb un error menor a una dècima.
Com $f(0)= 0-1-1<0$ i $f(2)>0 \Rightarrow$ solució entre 0 i 2 , i error d'aproximació <2-0=2

Com $f(1)=1-1-\cos 1 =-0.54 <0$ i $f(2)> 0 \Rightarrow$ solució entre 1 i 2 , error < 2-1=1.

Com $f(1.5)=1.5-1-\cos 1.5 = 0.429 >0$ i $f(1) <0 \Rightarrow$ solució entre 1 i 1.5 i error<1.5-1=0.5 .

Com $f(1.3) = 1.3 - 1 - \cos 1.3 = 0.03>0$ i $f(1)<0 \Rightarrow$ solució entre 1 i 1.3 i error <1.3-1=0.3 .

Com $f(1.2)=1.2-1-\cos 1.2 = -0.16<0 \Rightarrow$ solució entre 1.2 i 1.3 error<1.3-1.2=0.1

4.- Considerem la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$, trobeu l'equació de la recta tangent a y= f(x) en el punt d'abscissa 10.
Sabem que si x_0 és el punt de tangència, la tangent en x_0 és:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.
Com $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}$.
$f(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3.$
Per tant la tangent buscada és: $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 10) \Rightarrow 6y - 18 = x - 10 \Rightarrow$
$x - 6y + 8 = 0$.

5.- Calculeu els valors del paràmetre a ,$a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió són perpendiculars.
Busquem els punts d'inflexió, que venen caracteritzats per $y'' = 0$.
$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \Rightarrow y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a \Rightarrow$
$y'' = 12ax^2 + 12ax$.
$y'' = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 12ax = 0 \Rightarrow 12ax(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.
Com el pendent de la tangent en x_0 és $y'(x_0) \Rightarrow$
els pendents de les tangents en els punts d'inflexió són $y'(0)=-a$ i $y'(-1)=a$.

Si són perpendiculars $\Rightarrow y'(0)\cdot y'(-1) = -1 \Rightarrow (-a)\cdot a=-1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

6.- Sabem que la corba $y = ax^3 + bx^2 + cx$ és creixent i amb tangent horitzontal en x=1, mentre que la seva tangent en x = -1 forma un angle de $\pi/4$ amb l'eix de les abscisses. Determineu a, b i c.

De la lectura de l'enunciat en podem deduir que:

- Tangent en x = -1 fa un angle de $\pi/4$ amb l'eix X $\Rightarrow$ y'(-1) = tg ($\pi/4$)= 1 $\Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 1 \Rightarrow 3a - 2b + c = 1$.
- Tangent horitzontal en x=1 $\Rightarrow$ y'(1) = 0 $\Rightarrow 3a + 2b + c = 0$.
- Creixent en x=1 i y'(1)=0 $\Rightarrow$ 1 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ y ''(1)=0 $\Rightarrow \Rightarrow 6a + 2b = 0$.

Per tant a, b i c són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases}$$ restant la segona equació a la primera obtenim $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -4b = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-1}{4} \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} .$$

Substituint b obtenim $$\begin{cases} b = \dfrac{-1}{4} \\ 3a + 2\dfrac{-1}{4} + c = 0 \\ 6a + 2\dfrac{-1}{4} = 0 \end{cases} .$$

Isolant $$\begin{cases} b = \dfrac{-1}{4} \\ 3a + c = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} - 3 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{12} \end{cases} .$$

Per tant els valors demanat són $a = \dfrac{1}{12}, b = \dfrac{-1}{4}, c = \dfrac{1}{4}$.

7.- Considerem la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{b\cdot\sin(2x)}{x} & x<0 \\ \frac{a\cdot x - a}{x^2+x+1} & x \geq 0 \end{cases}$.

Trobeu els valors de a i b que fan que f sigui contínua a tots els reals i que la seva tangent en el punt d'abscissa 1 sigui paral·lela a la recta $2y = x$.

Si f és contínua a tots el reals $\Rightarrow$ f contínua a x=0 $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot x - a}{x^2+x+1} = -a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{b\cdot\sin(2x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot b\cdot\cos(2x)}{1} = 2\cdot b$$

$f(0) = -a$

$2\cdot b = -a$.

Si x=1 $\Rightarrow$ x>0 $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{a\cdot x - a}{x^2+x+1}$

La tangent en $x = 1$ paral·lela a $2y = x$ $\Rightarrow$ $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Com $f'(x) = \frac{a\cdot(x^2+x+1)-(2x+1)\cdot(a\cdot x - a)}{(x^2+x+1)^2}$ $\Rightarrow$ $f'^{(x)} = \frac{a\cdot 3 - 0)}{3^2} = \frac{a}{3}$.

$\frac{1}{2} = \frac{a}{3} \Longrightarrow a = \frac{3}{2} \Longrightarrow b = \frac{-3}{4}$.

8.- Donada la funció $y = \frac{5}{1+x^2}$ trobeu l'equació de tangents que passen per (0,5).

Si $f(x) = \frac{5}{1+x^2}$, la tangent en el punt d'abscissa x_0 és

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Trobem $f'(x_0)$.

,com $f'(x) = \frac{-2\cdot x\cdot 5}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-10\cdot x_0}{(1+x_0^2)^2}$

Per tant, la tangent en x_0 és $y - \frac{5}{1+x_0^2} = \frac{-10\cdot x_0}{(1+x_0^2)^2}\cdot(x - x_0)$.

Si passa per (0,5) $\Rightarrow$ $5 - \frac{5}{1+x_0^2} = \frac{-10\cdot x_0}{(1+x_0^2)^2}\cdot(0 - x_0)$

amb el que $\frac{5+5x_0^2-5}{1+x_0^2} = \frac{10\cdot x_0^2}{(1+x_0^2)^2} \Rightarrow \frac{5x_0^2}{1+x_0^2} = \frac{10\cdot x_0^2}{(1+x_0^2)^2}$

Operant

$5x_0^2\cdot(1+x_0^2) = 10\cdot x_0^2 \Rightarrow x_0^2 + x_0^4 = 2\cdot x_0^2 \Rightarrow x_0^4 - x_0^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0^2\cdot(x_0^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$ són el punts on la tangent, passa per (0,5).

Trobem l'equació de les tangents en aquests punts

Tangent en x_0=0

Com $f'(0) = \dfrac{-10 \cdot 0}{(1+0^2)^2} = 0$ i passa per (0,5),

la tangent és : y-5=0·(x-0). ⇒ **y=5**

Tangent en x_0=1

Com $f'(1) = \dfrac{-10 \cdot 1}{(1+1^2)^2} = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$ i passa per (0,5),

la tangent és y - 5 = -5/2 (x-0) ⇒ **y = -5/2·x + 5**

Tangent en x_0=-1

Com $f'(-1) = \dfrac{-10 \cdot (-1)}{(1+(-1)^2)^2} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ i passa per (0,5),

la tangent és y - 5 = 5/2 (x-0) ⇒ **y = 5/2·x + 5**

9.- Trobeu l'equació de les rectes tangents $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 7$, que passen pel punt de coordenades (-4, -9) .

Sabem que si x_0 és el punt de tangència, la tangent en x_0 és:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Trobem $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$

Per tant la tangent en x_0 té la forma:

$y - (x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 + 7) = (3x_0^2 - 4x_0 - 2) \cdot (x - x_0)$.

Si passa per (-4,-9) ⇒ $-9 - (x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 + 7) = (3x_0^2 - 4x_0 - 2) \cdot (-4 - x_0)$

Operant $x_0^3 + 5x_0^2 - 8x_0 - 12 = 0$

Per la regla de Ruffini

	1	5	-8	-12
-6		-6	6	12
	1	-1	-2	0

$x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Les tangents buscades són les tangents en -1 , 2 i -6.

<u>Tangent en -1</u>

$f'(-1) = 5 \Rightarrow y + 9 = 5(x+4) \Rightarrow y = 5x + 11$

<u>Tangent en 2</u>

$f'(2) = 2 \Rightarrow y + 9 = 2(x+4) \Rightarrow y = 2x - 1$

<u>Tangent en -6</u>

$f'(-6) = 130 \Rightarrow y + 9 = 130(x+4) \Rightarrow y = 130x - 511$

10.- Donada la funció $y = x^3 - 4x + 5$, trobeu l'equació de les tangents a aquesta funció que passen pel punt de coordenades (2,5).

Si x_0 és el punt de tangència, la tangent en x_0 és $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Si $f(x) = x^3 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x)=3x^2 - 4$
amb el que la tangent en x_0 és: $y - x_0^3 + 4x_0 - 5=(3x_0^2 - 4)(x - x_0)$

Si passa per (2,5) $\Rightarrow 5 - x_0^3 + 4x_0 - 5 = (3x_0^2 - 4)(2 - x_0) \Rightarrow$
i operant $- x_0^3 + 4x_0 = 6x_0^2 - 8 - 3x_0^3 + 4x_0 \Rightarrow 2x_0^3 - 6x_0^2 + 8 = 0 \Rightarrow$
$x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$
Resolent l'equació per la regla de Ruffini

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	0
2		2	2	
	1	1	0	

Els punts de tangència, pels quals la tangent passa per (2,5), són el 2 i el –1.

Tangent en x_0=2 :
Com $f'(2)=3\cdot4-4 = 8$, la tangent és $y-5 = 8 (x-2) \Rightarrow y = 8x - 11$

Tangent en x_0=-1 :
$f'(-1)=3\cdot(-1)^2-4=-1 \Rightarrow$ la tangent és $y-5= -1(x-2) \Rightarrow y = -x+7$.

11- Considerem la família de funcions $y = \dfrac{e^{-x}}{3-ae^x} + b$ que depenen de a i b. Trobeu per quins valors de a i b les rectes $x = 2$ i $y = 5$ li són asímptotes

Per aquest valors de a i b , estudieu el seu creixement i extrems.

$x = 2$ asímp $\Rightarrow \lim_{x\to2} \frac{e^{-x}}{3-ae^x} + b = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to2} 3 - ae^x = 0 \Rightarrow 3 - ae^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{e^2}$
$y = 5$ asímptota $\Rightarrow$
si és asímptota per l'esquerra:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{3-ae^x} + b = 5$, com $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{3-ae^x} + b = \frac{\infty}{3-0} + b = \infty$
no hi ha asímptota per l'esquera.
si és per la dreta
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{3-ae^x} + b = 5$ i com $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{3-ae^x} + b = 0 + b = b$
$\Rightarrow b = 5$.

Amb el que la funció és: $y = \frac{e^{-x}}{3-3e^{x-2}} + 5$

Estudiem el seu creixement.

És clar que el seu camp de continuïtat és $\mathbb{R}\setminus\{3-3e^{x-2}=0\} = \mathbb{R}\setminus\{e^{x-2}=1\}=$

$=\mathbb{R}\setminus\{x-2=0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Trobem la seva derivada:

$$y' = \frac{-e^x(3-3e^{x-2})-(-3e^{x-2})e^{-x}}{(3-3e^{x-2})^2} = \frac{-3e^x+3e^{x-2-x}+3e^{x-2-x}}{(3-3e^{x-2})^2}$$

és a dir: $y' = \frac{-3e^{-x}+6e^{-2}}{(3-3e^{x-2})^2}$.

Els punts crítics $y'=0 \Rightarrow -3e^{-x} + 6e^{-2} = 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{6}{3e^2} \Rightarrow -x = \ln\frac{2}{e^2} \Rightarrow$

$-x = \ln 2 - \ln e^2 = -2 + \ln 2 \Rightarrow \quad x = 2 - \ln 2 \approx 1.3038$

Els intervals de creixement seran:

$(-\infty, 2-\ln 2) \ni 0 \Rightarrow y'(0) < 0 \Rightarrow \downarrow$

$(2-\ln 2, 2) \ni 1.5 \Rightarrow y'(1.5) > 0 \Rightarrow \uparrow$

$(2, \infty) \ni 10 \Rightarrow y'(10) > 0 \Rightarrow \uparrow$

Com $y(2-\ln 2) = \frac{e^{2-\ln 2}}{3-3e^{2-\ln 2-}} = \frac{2e^{-2}}{3-3/2} = \frac{4e^{-2}}{3} = \frac{4}{3e^2}$

tenim que $\left(2-\ln 2, \frac{4}{3e^2}\right)$és màxim.

12.- Considerem la funció $f(x)=x^3 + 3x^2 -5$, estudieu-ne els seus màxims i mínims i els intervals de creixement.
Observant els extrem i el creixement d'aquesta funció, que en podem afirmar de les solucions de l'equació $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$.
És un polinomi i per tant contínua.
Com $f'(x) = 3x^2 + 6x$,
els punts crítics són $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.
Creixement:
$(-\infty, -2) \ni -10 \Rightarrow f'(-10) > 0 \Rightarrow$ f creixent
$(-2, 0) \ni -1 \Rightarrow f'(-1) < 0 \Rightarrow$ f decreixent
$(0, \infty) \ni 1 \Rightarrow f'(1) > 0 \Rightarrow$ f creixent

Com $f(0) = -5$ i $f(-2) = -1$, a partir d'aquest creixement, és evident que (-2,-1)és un màxim i que (0,-1) és un mínim.

A partir d'aquest creixement és evident que per $x<0$ les imatges sempre són negatives i per tant f és estrictament negativa $\Rightarrow$ l'equació $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ no té solucions negatives.

13.- Considerem la funció $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3$.
a) Raoneu que com a mínim té un zero real.
b) Estudiant-ne el creixement i extrems, raoneu que té un únic zero.
c) Aproximeu-lo amb un error menor a una dècima .

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3$ és un polinomi i per tant contínua.
Com f(0)=3>0 i f(-10)=-2000+400+3<0 per Bolzano entre -10 i 0 hi ha un punt z de manera que f(z)=0.

b) $f'(x) = 6x^2 + 8x = 2x(3x + 4)$

Punts crítics $\Rightarrow$ $2x(3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ \frac{-4}{3} \end{cases}$

Creixement:
-10∈(-∞ , -4/3) $\Rightarrow$ $f'(-10) > 0$ $\Rightarrow$ creixent
-1∈(-4/3,0) $\Rightarrow$ $f'(-1) < 0$ $\Rightarrow$ decreixent
1∈(0,∞) $\Rightarrow$ $f'(0) > 0$ $\Rightarrow$ creixent
També veiem -4/3 és un màxim i que 0 és mínim.
Com f(0)=3>0 i f creix a (0,∞) $\Rightarrow$ a l'interval (0,∞) no hi zeros de f
Entre -4/3 i 0 decreix $\Rightarrow$ entre -4/3 i 0 , f no té zeros.
Sabem que entre -∞ i -4/3 f té un zero i com sempre creix sols en pot tenir un.

c) Utilitzant el T de Bolzano, si z és el zero tenim que
f(0)>0 i f(-5)<0 $\Rightarrow$ z∈(-5, 0)
f(-2)>0 $\Rightarrow$ z∈(-5, -2)
f(-3)<0 $\Rightarrow$ z∈(-3, -2)
f(-2.5)=-3.25 $\Rightarrow$ z∈(-2.5, -2)
f(-2.3)=-0.174 $\Rightarrow$ z∈(-2.5, -2.3)
f(-2.2)=1.064>0 $\Rightarrow$ z∈(-2.3 ,-2.2)
i l'aproximació és menor a una dècima.

14.- Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} a\cdot e^x & x \le 0 \\ b + a\cdot \sin\ x & x > 0 \end{cases}$.

Quina relació tenen a i b quan la funció és contínua a tots els reals?
Per quins valors de a i b la funció y = f(x) és derivable en el punt 0 i la tangent en el punt d'abscissa 0 és paral·lela a la recta 6x - y = 2.
Com f derivable en 0 $\Rightarrow$ f cont en 0
i pel que hem vist a la part de modalitat tenim que **a = b .**

Ens qüestionem ara sobre l'existència del $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f\,'(0)$

Com és el l'imit en el punt 0, on la funció canvia de forma, caldrà veure l'existència dels els límits laterals i mirar si coincideixen.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - a}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot e^x - a}{x} = a\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = a\cdot \frac{0}{0}$$

Per resoldre la indeterminada, apliquem la regla de l'Hôpital, i tenim que:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=a\cdot 1=a\ .$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-a}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{f(x)-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{b+a\cdot\sin x-a}{x}=$$

Com f és contínua en 0 $\Rightarrow$ a=b , i per tant

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{b+a\cdot\sin x-b}{x}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=a\cdot\frac{0}{0}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=a\cdot 1=a$$

Per tant els límits laterals existeixen i coincideixen $\Rightarrow$ existeix $f'(0)=a=b$.

Per altra banda, si la tangent en 0 és paral·lela a la recta $6x-y=2\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(0)=$ pendent de $6x-y=2\Rightarrow f'(0)=6$.

Per tant, a= b = 6 .

15.- Trobeu els valors de a i b, sabent que la funció $f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x}-b & x\ge 1\\ b(3x+2)^2+x & x<1\end{cases}$ és contínua a tots els reals i que f '(-1)= -11

Per aquests valors de a i b, estudieu la derivabilitat de f, i trobeu la seva derivada.

Si f és contínua a tots el reals $\Rightarrow$ f contínua quan x=1 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$$

Com

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\ a\sqrt{x}-b=a-b$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\ b(3x+2)^2+x=25b+1$$

f(1)= a - b

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)\Rightarrow$ a-b = 25b + 1 $\Rightarrow$ a=26b + 1. (1)

Si x<1 $\Rightarrow$ f(x) = b(3x+2)^2 + x

$\Rightarrow$ f'(x) =2·b·(3x+2)·3 + 1

amb el que f'(-1)=-6b+1

Com l'enunciat deia que f'(-1)=-11, tenim que:

-11 = -6b + 1 $\Rightarrow$ b = 2,

i substituint a (1) tenim que a = 53 .

A la solució del C1, hem vist que a = 53 i b = 2, amb el que la funció és:

$$f(x)=\begin{cases}53\sqrt{x}-2 & x\ge 1\\ 2(3x+2)^2+x & x<1\end{cases}$$

Si x<1

$f(x) = 2\cdot(3\cdot x+2)^2 + x$, que és un polinomi i per tant derivable i $f'(x)=2\cdot 2\cdot(3\cdot x+2)\cdot 3 + 1 = 36\cdot x + 25$

Si x>1

$f(x) = 53\sqrt{x} - 2$ que és clarament derivable i $f'(x) = \dfrac{53}{2\sqrt{x}}$.

Si x=1

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Com la funció té un comportament diferent abans del 1 i després de 1, aquest límit existeix si existeixen el límits laterals i coincideixen.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{53\sqrt{x}-2-51}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{53\sqrt{x}-53}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{53\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{53\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{53\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{53}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{53}{2} .$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(3x+2)^2 + x - 51}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{18x^2 + 24x + 8 + x - 51}{x-1} = \frac{0}{0} =$$

aplicant la regla de l'Hôpital $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{36x+24+1}{1} = 61$

Con el dos límits són diferents, la funció no és derivable en 1.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{53}{2\sqrt{x}} & x > 1 \\ 18\cdot x + 13 & x < 1 \end{cases} .$$

16.- Enuncieu el teorema dels increments finits. Apliqueu-lo, si es pot, a la funció $y= 3 \ln x^3$ i l'interval $[1,e^4]$.

El teorema dels increments finits, afirma que :

Si $f:[a,b] \longrightarrow R$ **contínua a [a, b] i derivable a (a,b)** $\Rightarrow$

$\exists$ **c∈(a,b)** $\mid$ $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Com la funció és $f(x)=3 \ln x^3$ és contínua i derivable a tot l'interval $(0,\infty)$ i $[1,e^4] \subset (0,\infty)$ li podem aplicar el teorema dels increments finits.

i per tant existeix $c\in(1,e^4)$ $f'(c) = \dfrac{f(e^4)-f(1)}{e^4-1}$.

Com $f(1)=3\cdot\ln 1 = 0$, $f(e^4)=3\cdot\ln (e^4)^3 = 9\cdot 4$ i $f'(x) = \dfrac{9}{x}$,

el punt c, predit pel teorema, compleix que $\dfrac{9}{c} = \dfrac{4\cdot 9 - 0}{e^4-1}$ $\Rightarrow$

$$c = \frac{e^4-1}{4}$$

17.- Trobeu, si es pot, el punt predit pel teorema dels increments finits a la funció $y = \frac{x^2}{3x-4}$ a l' interval [2 , 4] .

El teorema dels invrements finits afirma que

f:[a,b] ⟶R f continua a [a,b] i derivable a (a,b) ⇒

⇒ **existeix c∈(a,b) de manera que** $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Com f és un quocient de polinomi, serà contínua i derivable en el seu domini, que clarament està format per tots els reals excepte el 4/3.

Com 4/3∉ [2 , 4] ⇒ y és cont a [2 , 4] i der a (2,4).

⇒ existeix c∈(2,4) $y'(c) = \frac{y(4)-y(2)}{4-2}$

com y(2)=4/2=2 i y(4)= 16/8=2 i

$$y' = \frac{2x(3x-4)-3x^2}{(3x-4)^2} = \frac{6x^2-8x-3x^2}{(3x-4)^2} = \frac{3x^2-8x}{(3x-4)^2}$$

Tenim que existeix c∈ (2,4) $y'(c) = \frac{3c^2-8c}{(3c-4)^2} = \frac{2-2}{2} = 0$ ⇒

$3c^2 - 8c = 0$ que té per solucions 0 ∉ (2,4) i 8/3∈(2,4).

Per tant el punt predit pel teorema és el 8/3 .

18.- Raoneu que es pot aplicar el teorema dels increments finits a la funció $y = x^2e^{1-x^2}$ a l'interval $[-1\,,1]$ i doneu el punt predit pel teorema.

El teorema dels increments finits diu que:

f:[a,b] ⟶R **f contínua a [a,b] i derivable a (a,b)** ⇒

⇒ **existeix c∈(a,b) de manera que** $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Apliquem-lo a $y = x^2e^{1-x^2}$ a l'interval $[-1\,,1]$.

Com si $f(x) = x^2e^{1-x^2}$ és un polinomi per l'exponencial d'un polinomi, és producte de contínues i derivables a tot els reals; i per tant contínua a $[-1\,,1]$ i derivable a (-1, 1) ⇒ se li pot aplicar el teorema.

$f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$ i $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^0 = 1$

$f'(x) = 2xe^{1-x^2} + x^2(-2x)e^{1-x^2} = 2xe^{1-x^2}(1-x^2)$ ⇒

$\Rightarrow\ \exists c\in(-1,1)\quad 2ce^{1-c^2}(1-c^2)=\frac{\boldsymbol{f(1)-f(-1)}}{\boldsymbol{1-(-1)}}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists c\in(-1,1)\quad 2ce^{1-c^2}(1-c^2)=\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{0}\ \Rightarrow$

Resolent l'equació $2ce^{1-c^2}(1-c^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0\ \in(-1,1) \\ c^2=\pm1\ \notin(-1,1) \end{cases}$.

I per tant el punt predir pel teorema és el 0.

19.- Estudieu si és aplicable el teorema de Cauchy a les funcions y=2x i y=ln x a l'interval [1,e], en cas afirmatiu, calculeu el punt predit pel teorema.

El teorema de Cauchy diu que si
f:[a,b] ⟶ R i g:[a,b] ⟶ R
f i g contínues a [a,b] i derivables a (a,b) ⇒

$\Rightarrow\ \exists\ c\in(a,b)$ de manera que $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Si prenem f(x)=2·x i g(x)= ln x és clar que f i g són contínues i derivable a (0,∞) i per tant contínues a [1,e] i derivable a (1, e), amb el que podem aplicar el teorema de Cauchy.

i per tant $\exists\ c\in(1,e)$ de manera que $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(e)-f(1)}{g(e)-g(1)}\ \Rightarrow$

Com f(e)=2·e , f(1)=2, f'(x)=2 ;
g(e)= ln e = 1 , g(1) = ln 1 = 0 , $g'(x)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow\exists\ c\in(1,e)$ de manera que $\frac{2}{\frac{1}{c}}=\frac{2e-2}{1-0}\ \Rightarrow c=e-1$.

20.- Estudieu les asímptotes de la funció $y=\dfrac{3e^x+6}{2e^x-3}$.

Si y=f(x) és una funció real de variable real i r és una recta, direm que r és una asímptota de y=f(x) si la distància entre un punt $(x_0,f(x_0))$ i r tendeix a 0, quan x_0 o $f(x_0)$ tendeixen a ±∞.

Distingim tres tipus d'asímptota:

Verticals

x=a asímptota $\Leftrightarrow\ \lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

Horitzontals

y=a asímptota $\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$

Obliqües

y=mx+n asímptota $\Leftrightarrow\ \exists m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\quad \exists n=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx$

Asímptotes de $y=\frac{3e^x+6}{2e^x-3}$

Verticals

Les discontinuïtats es donen quan $2e^x-3=0\Rightarrow$

$2e^x=3\ \Rightarrow e^x=\frac{3}{2}\ \Rightarrow x=ln\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to ln\frac{3}{2}} f(x)=\infty\quad\Rightarrow\ x=ln\frac{3}{2}$ és asímptota

Horitzontals

$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^x+6}{2e^x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ asímptota

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x+6}{2e^x-3} = \frac{6}{-3} = -2 \Rightarrow y = -2$ asímptota.

Obliques

no en té.

21.- Sigui $f: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ la funció $f(x) = e^x(ax+b)$, on a i b són nombres reals.
a) Calculeu els valors de a i b per tal que tingui un extrem relatiu en el punt $(3,e^3)$.
b) Per aquests valors de a i b, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

$(3,e^3)$ extrem relatiu $\Rightarrow f'(3) = 0$

Derivant $f'(x) = e^x(ax+b) + (a)e^x = e^x(ax+b+a)$

$$f'(3) = e^3(a3+b+a) = e^3(4a+b) = 0$$

Com $e^x \neq 0 \Rightarrow 4a+b=0 \Rightarrow b=-4a$

Passa per $(3,e^3) \Rightarrow f(x) = e^3(a3+b) = e^3 \Rightarrow 3a+b=1.$

I per tant $3a-4a=1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=4.$

Per veure quin tipus d'extrem és fem la segona derivada de f

$$f''(x) = e^x(ax+b+a) + ae^x = e^x(ax+b+2a)$$
$$f''(3) = e^3(a3+b+2a) = e^3(-5+4) < 0$$

$\Rightarrow$ es tracta d'un màxim.

22.- Estudieu la concavitat de la funció $y = x^3 e^{2x}$.

$y=x^3 \cdot e^{2x}$ és continua a tot $\mathbb{R}$ al ser el producte d'un polinomi per l'exponencial d'un polinomi.

Trobem la primera derivada

$y' = 3x^2e^{2x}+2e^{2x}x^3 = e^{2x}(3x^2+2x^3)$.

La segona derivada és

$y'' = 2e^{2x}(3x^2+2x^3)+(6x+6x^2)e^{2x} = e^{2x}(4x^3+12x^2+6x)$.

$y''=0 \Rightarrow 4x^3+12x^2+6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x^2+12x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+6x+3=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

	$\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$	0
y''	+	-	+	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

I a $x=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ hi ha punts d'inflexió.

23.- Donada la funció $f(x) = \frac{(2x+6)^2}{(2x+4)^2}$

trobeu-ne el seu domini i continuïtat, estudieu-ne les asímptotes el creixement i extrems , construïu-ne un esquema del seu gràfic.

És clar que

$$f(x) = \frac{(2x+6)^2}{(2x+4)^2} = \frac{2^2(x+3)^2}{2^2(x+2)^2} = \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$$

- **Domini i continuïtat**:
  És un quocient de polinomis i per tant un quocient de contínues; amb el que el domini de f i el camp de continuïtat serà :
  Dom (f)= CC(f) = $R\backslash\{(x+2)^2=0\} = R\backslash\{-2\}$.

- **Trobem les asímptotes**:
  - **Verticals**:
    Com sols es poden donar en punts de discontinuïtat sols ens veure el valor de $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2} = \infty \Rightarrow$ x = - 2 asímptota vertical.
  - **Horitzontals:**
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$
    aplicant la regla de l'Hôpital
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x+3)}{2(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$$
    la recta y=1 és asímptota horitzontal.

- **Creixement i extrems:**
  Trobem la primera derivada de f

$$f'(x) = \frac{2(x+3)(x+2)^2 - 2(x+2)(x+3)^2}{(x+2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+3)(x+2) - 2(x+3)}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+3)(-1)}{(x+2)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(x+3)}{(x+3)^3}$$

f'(x)=0 $\Rightarrow$ x+3=0 $\Rightarrow$ x= -3

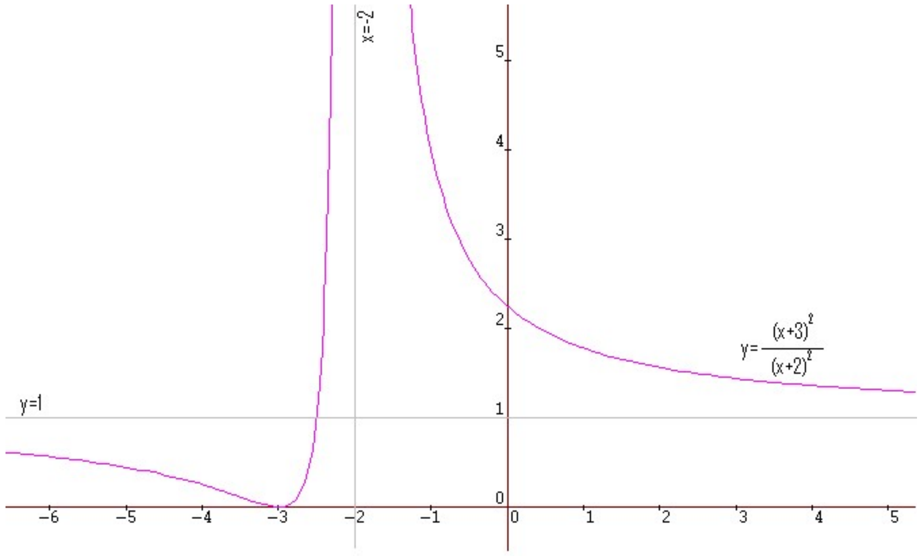
Estudiem el signe de la 1ª derivada

(-∞,-3)∍-10 $\Rightarrow$ f'(-10)<0 $\Rightarrow$ f decreix
(-3,-2)∍-2.5 $\Rightarrow$f'(-2.5)>0 $\Rightarrow$ f creix
(-2,∞)∍0 $\Rightarrow$f'(0)<0 $\Rightarrow$ f decreix

Del creixement en poden deduir que el –3 és un mínim;

com f(-3)=0 $\Rightarrow$ el punt (-3,0) és mínim

Finalment el seu gràfic és aproximadament:



24.- Donada la funció $y=\dfrac{x-2e^x}{1+e^x}$, estudieu-ne el creixement i els extrems, trobeu-ne les asímptotes i feu un esquema del seu gràfic.

És clar que el domini i el camp de continuïtat són tots el reals.
Trobem la seva derivada:

$$y'=\frac{(1-2e^x)\cdot(1+e^x)-e^x\cdot(x-2e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{1+e^x-2e^x-2e^{2x}-xe^x+2e^{2x}}{(1+e^x)^2}\Rightarrow$$

$$y'==\frac{1-e^x-x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$$

Trobem els punts crítics $y'=0 \Rightarrow$ 1- e^x - x e^x = 0 $\Rightarrow$ 1- e^x (1+ x)=0. $\Rightarrow$
1= e^x (1+ x) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{e^x}=1+x$.

Equació que és obvi que té la solució 0 i

si x >0 $\Rightarrow$ $e^x>1 \Rightarrow \dfrac{1}{e^x}<1$ i 1+x>1

si x<0 $\Rightarrow$ $e^x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{e^x}>1$ i 1+x<1

Per tant y'=0 $\Leftrightarrow$ x=0.

Estudiem el **creixement**

(-∞,0) ∍-1 $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{1-e^{-1}+e^{-1}}{(1+e^{-1})^2}=\dfrac{1}{(1+e^{-1})^2}>0$ $\Rightarrow$ y creix a (-∞,0) .

(0,∞) ∍ 1 $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{1-e^1-e^1}{(1+e^1)^2}=\dfrac{1-2\cdot e}{(1+e^1)^2}<0$ $\Rightarrow$ y decreix a (0,∞) .

A més tenim que (0,y(0))=(0,-1) és màxim.

Asímptotes

Verticals no en té, ja que és contínua a tots els reals.

Horitzontals

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2e^x}{1+e^x}=\frac{-\infty}{\infty}$$

aplicant la regla de l´Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2e^x}{e^x}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}-2=-2$$

$\Rightarrow$ y=-2 asímptota.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2e^x}{1+e^x}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

Obliques

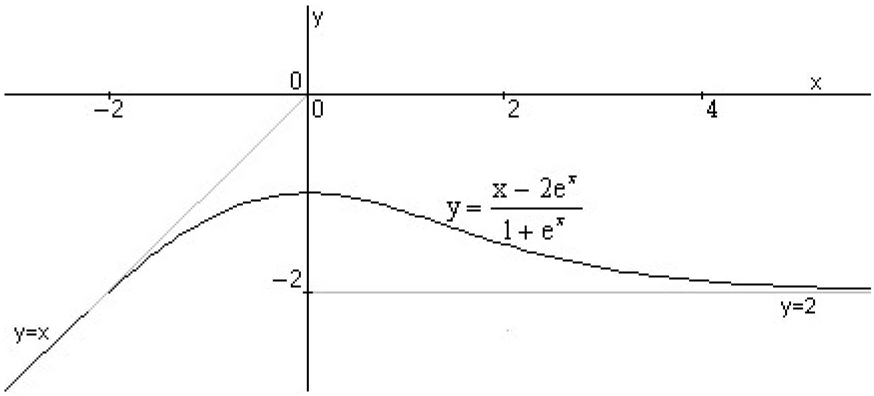
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{2e^x}{x}}{1+e^x}=\frac{1-0}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[y-m\cdot x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-2e^x}{1+e^x}-x\right]=$$

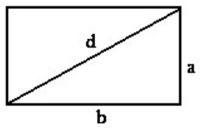
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2e^x-x-x\cdot e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2e^x-x\cdot e^x}{1+e^x}=0$$

Per tant la recta y=x és asímptota obliqua.

El seu gràfic és:



25.- Determineu la diagonal mínima de tots els rectangles de 8 m de perímetre.



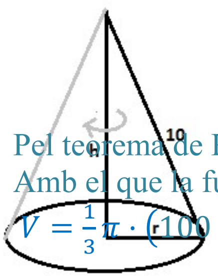
Pel teorema de Pitàgores $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$ que és la funció que volem mínima.
Com el perímetre és $2a + 2b = 8 \Rightarrow b = 4 - a$

Amb el que
$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4-a)^2} = \sqrt{a^2 + 16 - 8a + a^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 16}$
$d = \sqrt{2a^2 - 8a + 16}$ funció a fer mínima.

Derivant $d' = \frac{4a-8}{2\sqrt{2a^2-8a+1}} = \frac{2a-4}{\sqrt{2a^2-8a+16}}$
Busquem els punts crítics $d' = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$.
Com a $(0, 2)$ $d' < 0$ i a $(2, 4)$ $d' > 0$ $\Rightarrow$ a=2 és mínim.

Per tant la diagonal mínima és $d = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 16} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ m$.

26.- Un triangle rectangle té una hipotenusa de 10m. Si el fem girar entorn d'un dels seus catets, obtenim un con. Calculeu entre quins valors varia el volum d'aquest con.



Com el volum d'un con és $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, aquesta és la funció de la que en volem trobar el valor màxim i mínim.

Pel teorema de Pitàgoras $100 = r^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = 100 - h^2$.
Amb el que la funció a fer màxima i mínima és:
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (100 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (100 \cdot h - h^3)$.

Derivant $V' = \frac{1}{3}\pi \cdot (100 - 3h^2)$

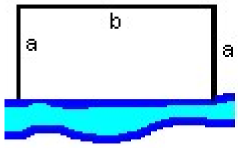
Trobem els punts crítics $V' = 0 \Rightarrow 100 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow h = \pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$
És clar que el valor negatiu no s'ajusta al nostre enunciat per tant el punt crític és:
$h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Com $V'' = \frac{1}{3}\pi \cdot (-6h) \Rightarrow V''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ es tracta d'un màxim
Per tant el volum màxim és
$V = \frac{\pi}{3}\left(100 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(100 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{1000\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{27}\sqrt{3}m^3$.

Pel que fa al volum mínim com no és un punt crític, ha de ser un dels extrems del domini de la funció, i és obvi que correspondrà al valor h=0.
Per tant el volum d'aquest con varia entre 0 i $\frac{2\pi}{27}\sqrt{3}m^3$.

27.- Per tal de que pasturin les vaques, volem encercar un terreny en forma rectangular. Aprofitant la presencia d'un riu , situarem un dels costats del terreny en el riu i no caldrà tancar-lo. Si el preu de la tanca és de 12 €/m i disposen de 450 €, trobeu les dimensions que hem de donar al terreny per tal de la superfície encerclada sigui la màxima possible.

Si anomenem **a** als dos costats de la tanca que donen al riu, i **b** al costat paral·lel al riu, i les mesures són en metres, tenim que:



La superfície encerclada és $S = a \cdot b$ (1) que és la funció a fer màxima i el cost de la tanca és de $12 \cdot (2 \cdot a + b) = 450$ € .

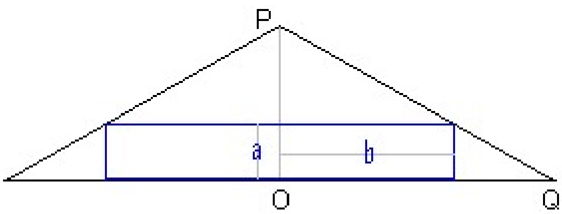
Com $12 \cdot (2 \cdot a + b) = 450 \Rightarrow b = 37.5 - 2 \cdot a$.
Substituint a (1) , tenim que:
$S = a \cdot b = a \cdot (37.5 - 2\, a) = 37.5\, a - 2\, a^2$.
Derivant
$S' = 37.5 - 4\, a$.

Busquem els punts crítics
$37.5 - 4\, a = 0 \Rightarrow a = 9.375$.
Mirem si és màx o mínim

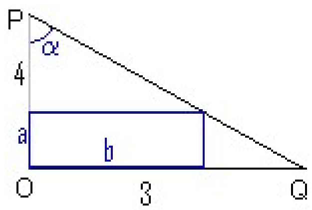
$S'' = -4 < 0 \Rightarrow$ és $a = 9.375$ m és màxim
Com $b = 37.5 - 2\, a = 18.75$

Per tant les mides que cal donar a la tanca són de 18.75 m el costat paral·lel al riu i de 9.375 m els costats perpendiculars al riu.

28.- La paret de les golfes d'una casa té forma d'un triangle isòsceles amb una base de 6 m i una altura de 4 m. . Sobre aquesta paret, es vol construir una llibreria de forma rectangular. Quines mides haurà de tenir la llibreria per tal que la seva superfície sigui màxima?
Segons l'enunciat



i cal fer màxim $S = a \cdot 2b$. (1)
Al triangle POQ, observem que



$$tg\alpha = \frac{3}{4} = \frac{b}{4 - a}$$

$\Rightarrow b = 3 - 3 \cdot a/4$

Substituint a (1)

$S = a\cdot 2\cdot b = a\cdot 2\cdot(3-3a/4) = 3\cdot 2\cdot a - 3a^2/2$ que és la funció a optimitzar.

Derivant $S' = 3\cdot 2 - 3\cdot a$.
Buscant el punts crítics $S'=0 \Rightarrow 3\cdot 2 - 3\cdot a.=0 \Rightarrow a = 2$.
Mirem si és màxim, per això $S'' = -3 < 0 \Rightarrow a=2$ és màxim.
Com per $a=2 \Rightarrow b = 3/2$

Les mides de la llibreria d'àrea màxima son 2 m d'altura i $2\cdot 3/2 = 3$ m de base.

29- Busqueu les rectes de la família $y = 2ax + a^2$ que estan a distància mínima del punt (0,-1).

Com la distància d'un punt (x_0,y_0) a la recta r: $Ax + By + C = 0$ és:

$$d((x_0,y_0),r) = \frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

la funció a fer màxima és

$$d = d\big((0,1),\ 2ax + a^2 - y = 0\big) = \frac{|2a\cdot 0 + a^2-(-1)|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}} = \frac{|a^2+1|}{\sqrt{4a^2+1}} = \frac{a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}}.$$

Derivant $$d' = \frac{2a\cdot\sqrt{4a^2+1} - \frac{8a}{2\sqrt{4a^2+1}}\cdot(a^2+1)}{4a^2+1} = \frac{2a\cdot(4a^2+1) - 4a\cdot(a^2+1)}{\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1)} =$$

$$d' = \frac{4a^3-2a}{\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1)}$$

Trobem els punts crítics:

$$d' = \frac{4a^3-2a}{\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1)} = 0 \ \Rightarrow 4a^3 - 2a = 0 \ \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Mirem que són:

$$d'' = \frac{(12a^2-2)\cdot\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1) - \left(\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1)\right)'\cdot(4a^3-2a)}{\left(\sqrt{4a^2+1}\cdot(4a^2+1)\right)^2}$$

Com $d''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{+-0}{+} > 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *és mínim*

$d''(0) = \frac{--0}{+} < 0 \Rightarrow a = 0$ *és màxim*

$d''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{+-0}{+} > 0 \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *és mínim*

Les rectes buscades són :

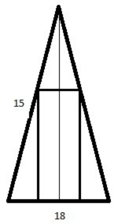
$y = \sqrt{2}\cdot x + \frac{1}{2}$ i $y = -\sqrt{2}\cdot x + \frac{1}{2}$

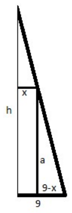
30.- Es disposa de 50 unitats d'un producte, cada una de les quals té un preu de sortida de 100 € unitat. Per cada 5 € que s'augmenta el preu, es perd un client, deteriorant-se una unitat del producte.
Quin és el preu per unitat que més ingressos proporciona?

Anomenem x al nombre d'unitats que es deixen de vendre per causa de l'augment, tenim que:
Unitats venudes = $50 - x$
Preu venda = $(100 - 5\cdot x)$ €.
Ingressos = Unitats venudes per Preu venda = $(50-x)\cdot(100+5\cdot x)$ que és la funció que volem màxima.
Derivant $I' = -1\cdot(100+5x) + 5(50-x) = -10x + 150$.
Busquem els punts crítics: $I' = 0 \Rightarrow 10x = 150 \Rightarrow x=15$.

Com I’’ = -10 <0 ⇒ x=15 és màxim i el preu que li correspon és
100 + 15·5 = 175 € .

31.- Un triangle isòsceles té dos costats iguals de 15 cms cadascun i el costat desigual amida 18 cms. Dins aquest triangle, inscrivim un rectangle on un costat del rectangle reposa sobre el costat desigual del triangle. Entre quins valors variarà l'àrea del rectangle?

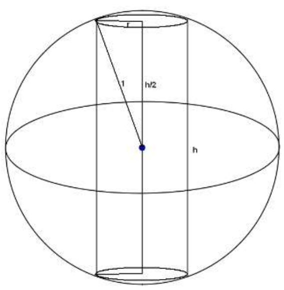




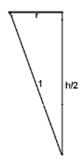
Projectant el vèrtex sobre el costat desigual, obtenim el triangle rectangle que amb el teorema de Pitagores veiem que l’altura del triangle és $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$

És clar que es formen dos triangles es posició de Thales i que per tant
$\frac{a}{9-x} = \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{a}{9-x} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{36-4x}{3}.$
I l’àrea del rectangle que és A=2·x·a , que és la funció a fer màxima.
Substituint a, obtenim: $A = 2\ x\ a = 2\ x\frac{36-4x}{3} = \frac{2}{3}(36x - 4x^2)$
Derivant $A' = \frac{2}{3}(36 - 8x)$
Buscant els punts crítics: 36-8x=0 $\Rightarrow x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$.
Mirem si és màxim, com $A'' = \frac{-1}{3} < 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ correspon al rectangle d’àrea màxima
$\Rightarrow$ Àrea màxima és $A\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(36\frac{9}{2} - 4\left(\frac{9}{2}\right)^2\right) = 54\ cms^2$
Per altra banda,
x sols varia entre 0 i 9 i quan x=0 el rectangle tindria àrea 0,
Amb el que l’àrea del rectangle està entre 0 i 54 cms^2 .

32.- D'entre tots els cilindres inscrits en una esfera de radi 1 m, trobeu el de major volum.



El volum del cilindre és $V = \pi r^2 h$ que és la funció a optimitzar.
És clar que se’ns forma un triangle rectangle de catets r i h/2 i hipotenusa 1 m .



Pel teorema de Pitàgores
$1 = r^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 1 - (h/2)^2$.
Amb el que el volum és
$V = \pi\left(1 - (h/2)^2\right)h = \pi\left(h - \frac{h^3}{4}\right)$ que és la funció a optimitzar.

Derivant $V' = \pi\left(1 - \frac{3h^2}{4}\right)$

Si ara trobem els punts crítics V’ = 0 $\Rightarrow 1 - \frac{3h^2}{4} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$h = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} m$ (prescindim del valor negatiu, doncs no té sentit en el plantejament que hem fet) .

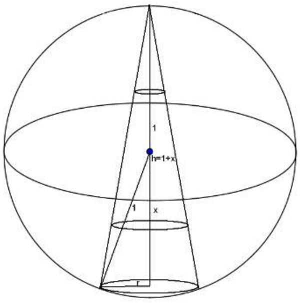
Comprovem que $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}m$ es tracta d'un màxim $\Rightarrow$

$V''=\pi\left(-\dfrac{3h}{2}\right)<0$ és màxim.

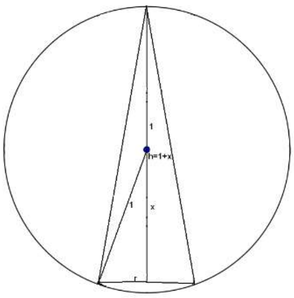
Trobem finalment el radi del cilindre $r^2=1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}/2\right)^2=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow$

$r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}m$

33.- Calculeu les dimensions d'un con inscrit en una esfera de radi 1 mm, si sabem que té volum màxim.



El volum del con és $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ que és la funció a optimitzar.



Dividim h en dues part, una d'elles el radi de l'esfera i l'altra el que en diem x, h = 1 + x $\Rightarrow$ $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2(1+x)$

Se'ns forma un triangle rectangle
i pel teorema de Pitàgores
$1=r^2+x^2 \Rightarrow r^2=1-x^2$

Substituint al volum $V=\dfrac{1}{3}\pi(1-x^2)(1+x)=\dfrac{\pi}{3}\left(1+x-x^2-x^3\right)$ que és la funció a optimitzar.

Derivant $V'=\dfrac{\pi}{3}\left(1-2x-3x^2\right)$

Busquem els punts crítics V'=0 $\Rightarrow$

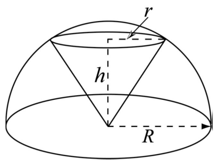
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-6}=\frac{2\pm 4}{-6}=\begin{cases}-1 & (no \quad té \quad sentit)\\ & \dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Comprovem que x=1/3 és un màxim. $V''=\dfrac{\pi}{3}(-2-6x) \Rightarrow$

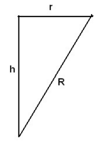
$V''(1/3)=\dfrac{\pi}{3}(-2-6\cdot 1/3)<0 \Rightarrow$ és màxim.

Com $r^2 = 1 - x^2$, el radi que comporta volum màxim és $r^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \Rightarrow$
$r = \frac{2}{3}\sqrt{2}mm$ i l'altura és h=1+x = 1 + 1/3 = 4/3 mm .

34.- En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera.
Trobeu les dimensions d'aquest con perquè el seu volum sigui màxim.

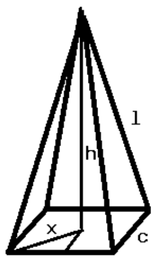


$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ funció a fer màxima.
Pel T de Pitàgores
$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$



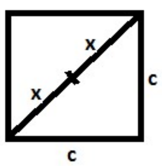
amb el que $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 \cdot h - h^3)$
Derivem i busquem els punts crítics:
$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 - 3 \cdot h^2) \Rightarrow R^2 - 3 \cdot h^2 = 0 \Rightarrow h = \pm\frac{R}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$
Mirem si és màx o mín
$V'' = -2 \cdot \pi \cdot h$
$V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R\right) < 0 \Rightarrow$ és màxim,
$r^2 = R^2 - \frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}R^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$
Les dimensions del con per tenir volum màxim són: $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$ i $h = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot R$

35.- Les quatre arestes laterals d'una piràmide recta de base quadrada tenen longitud 1. Digueu quin és el màxim volum que pot tenir la piràmide.



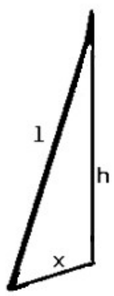
Si anomenem h a l'altura de la piràmide i c al costat de la base el seu volum és $V = \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot h$ i és el que volem màxim.

Busquem la relació entre c i h.



Pel teorema de Pitagores la diagonal de la base és $d^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot c$ i si x és mitja diagonal $x = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Si ara considerem aquest altra triangle, també rectangle, pel teorema de Pitagoras $1^2 = h^2 + x^2$.



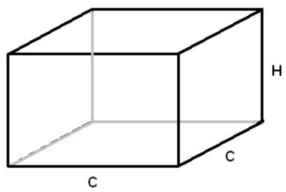
I combinant els dos resultats $1 = h^2 + \frac{1}{2}c^2 \Rightarrow c^2 = 2 \cdot (1 - h^2)$.

Substituint al volum
$V = \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot (1 - h^2) \cdot h = \frac{2}{3}(h - h^3)$ func a fer màx.
$V' = \frac{2}{3} \cdot (1 - 3h^2)$

Busquem els punts crítics $V' = \frac{2}{3}\cdot(1-3h^2) = 0 \implies h^2 = \frac{1}{3} \implies h = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Com $V'' = \frac{2}{3}\cdot(-6h) \implies V''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \implies h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dona lloc al volum màxim, que és $V_{m`xim} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{27}\sqrt{3}\ m^3$.

36.- Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i volum 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem per a què la pèrdua de calor total sigui mínima.



Com la superfície del sostre és C^2 , les pèrdues de calor pel sostre són $300\cdot C^2$, mentre que les pèrdues laterals són $100\cdot4\cdot CH$.

Per tant les pèrdues de calor són

$P(C,H) = 300C^2 + 400CH$.

Al ser el volum $C^2\cdot H = 768\ m^3 \Rightarrow H = \frac{768}{C^2}$.

Amb el que les pèrdues en funció del costat de la base són

$P(C) = 300C^2 + 400\ C\ \frac{768}{C^2} = 300C^2 + \frac{307\ 200}{C}$ funció a fer mínima.

Derivant: $P'(C) = 600\ C - \frac{307\ 200}{C^2}$.

Busquem els punts crítics $600\ C - \frac{307\ 200}{C^2} = 0 \Rightarrow 600\ C = \frac{307\ 200}{C^2} \Rightarrow$

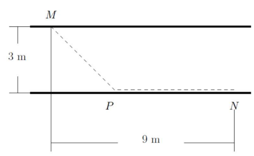
$C^3 = 518 \Rightarrow C = 8$.

Comprovem que és mínim .

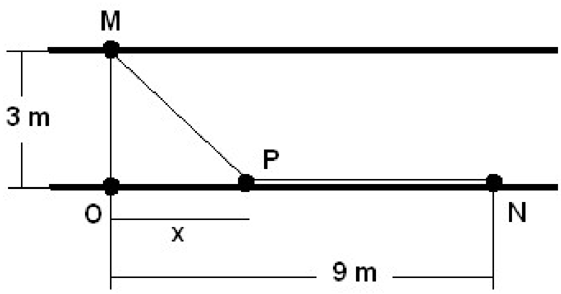
$P''(C) = 600 + \frac{2\cdot307\ 200}{C^3} \Rightarrow P''(8) > 0$ per tant és mínim.

Les dimensions que tenen menys pèrdues de calar són $C = 8\ m$ i $H = \frac{768}{8^2} = 12\ m$.

37.- Volem unir el punt M en un cantó d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre cantó de carrer, i 9 m més avall, mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P de l'altre cantó del carrer i un altre des de P fins a N seguint en el mateix cantó de carrer segons l'esquema.



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6€/m. Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui el més econòmica possible? Quin serà aquest cost mínim?



Si x és la distància entre el punt O al P, la distància de M a P és $MP = \sqrt{3^2 + x^2}$

i la de P a N és $PN = 9 - x$

Amb el que el cost de la instal·lació és :

$C(x) = 12\cdot\sqrt{9+x^2} + 6\cdot(9-x)$ que és la funció a fer mínima.

$C'(x) = 12\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - 6 = \frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} - 6$

Busquem els punts crítics:

$\frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} = 6 \Rightarrow 2x = \sqrt{9+x^2} \Rightarrow 4x^2 = 9 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

La solució negativa no s'ajusta a l'enunciat .
Com $(0.\sqrt{3}) \ni 1 \Longrightarrow c'(1) < 0$ i $(\sqrt{3},9) \ni 4 \Longrightarrow c'(4) > 0$
$\Rightarrow$ $\sqrt{3}$ és mínim.
Per tant el cost mínim és $C(\sqrt{3}) = 12 \cdot \sqrt{9+3} + 6 \cdot (9-\sqrt{3}) \sim 85.17$ € .

38.- Trobeu una primitiva de $y = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 3x - \frac{\ln x}{x}$ que passi pel punt de coordenades (1,-e).

Trobem totes les primitives d'aquesta funció.

$F(x) = \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 3x - \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{5}{x} dx + \int 3x dx - \int \frac{\ln x}{x} dx =$

$= 2\int x^{-2} dx + 5\int \frac{1}{x} dx + 3\int x dx - \int \frac{\ln x}{x} dx =$

$= 2x^{-1} + 5\ln x + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx$

Com $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left(\begin{matrix} t=\ln x \\ dt \ \ \frac{1}{x}dx \end{matrix}\right) = \int t \cdot dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2} ln^2 x$

Amb el que $F(x) = 2x^{-1} + 5\ln x + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} ln^2 x + C$

Si passa per (1,-e) $\Rightarrow F(1) = -e \Rightarrow 2 + 0 + \frac{3}{2} - 0 + C = -e \Rightarrow C = -e - \frac{7}{2}$

Amb el que la primitiva demanada és:

$F(x) = 2x^{-1} + 5\ln x + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} ln^2 x - e - \frac{7}{2}$

39.- Trobeu una primitiva de $f(x) = \frac{3x+3}{x^2+2x}$ que passi per (1, 2).

Les primitives de f(x) són:

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x} dx = \left(\begin{matrix} t=x^2+2x \\ dt=(2x+2)dx \end{matrix}\right) = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln t =$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2 + 2x| + C$

Si passa per (1,2) $\Rightarrow$ F(1)=2 $\Rightarrow \frac{3}{2}\ln\left|1^2 + 2 \cdot 1\right| + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \frac{3}{2}\ln 3$

La primitiva buscada és: $F(x) = \frac{3}{2}\ln|x^2 + 2x| + 2 - \frac{3}{2}\ln 3$.