SISTEMES LINEALS.

CONCEPTE S BÀSICS.

Entenem per **equació lineal** a una expressió en la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$.

De les x_1 , x_2 ,.., x_n en diem **incògnites**, les a_1 , a_2 ,... , a_n són els **coeficients** de les incògnites i el número b és el **terme independent** de l'equació.

Una **solució de l'equació**, és un conjunt de valors de les incògnites, s_1, s_2 , ... ,s_n que substituïts a l'equació, la transformen en una identitat certa.

Un sistema de **m equacions lineals amb n incògnites** és un conjunt de m equacions lineals amb les mateixes n incògnites, que s'han de verificar simultàniament, és a dir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad :::::::::::::::::::::::: \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Una **solució del sistema**, és un conjunt de valors de les incògnites, s_1, s_2 , ... , s_n , que substituïts a totes les equacions, les transformen en identitats certes.

Per conèixer el sistema, n'hi ha prou en saber els coeficients i els termes independents; amb el que a tot sistema lineal (1) , li podem associar la matriu A **dels coeficients** i el vector **columna dels termes independents**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ & ::::::::::::::::: & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_m \end{pmatrix}$$

sovint, ho sintetitzem, en una sola matriu que anomenem **matriu ampliada** A' o A_m .

$$A' = A_m = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ & ::::::::::::::::: & & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) .$$

Observeu que, si expressem les incògnites x_1 , x_2 , ... , x_n com a un vector columna, podem expressar-ho el sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ & ::::::::::::::::: & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

és a dir : $A\,\vec{x} = \vec{b}$.

Un sistema també el podem entendre com les columnes de la matriu A, que multiplicades per les incògnites x, donen la columna de termes independents, és a dir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

I si cada columna de A, l'entenem com un vector, tindrem que el sistema és equivalent a $\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$ i trobar una solució del sistema serà expressar el vector $\vec{b}$ com combinació lineals dels vectors $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$.

SISTEMES COMPATIBLES I SISTEMES INCOMPATIBLES.

Hem definit una solució d'un sistema lineal, com un conjunt de valors de les incògnites, que substituïdes a totes les equacions, les transformen en identitats certes.
Llavors, diem que un sistema lineal és

compatible $\Leftrightarrow$ admet alguna solució.
incompatible $\Leftrightarrow$ no admet solució.

Exemple:

- El sistema: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ és **compatibl**e, doncs

  doncs si substituïm x per 1 i y per 0 tenim que $1 + 0 = 1$ i $1 - 0 = 1$ $\Rightarrow$ x=1 i y=0 és solució del sistema.

- El sistema: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ és **incompatible** , doncs

  per qualsevol valor real que donem a x i a y, si la seva suma no pot ser alhora 1 i 2.

PROPIETAT.
Un sistema lineal és un sistema compatible $\Leftrightarrow$ rang A = rang A' .

Ja que:

El sistema és compatible $\Leftrightarrow$ existeixen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ solució del sistema $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ existeixen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de manera que $\vec{a}_1 s_1 + \vec{a}_2 s_2 + \ldots + \vec{a}_n s_n = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ el vector $\vec{b}$ és combinació lineals dels vectors $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\text{rang}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n) = \text{rang}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n, \vec{b})$

Exemple:

Mirarem la compatibilitat del sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

estudiem el rang de les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Com $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ rang A = 2 i det $A' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 -3 +13 + 13 +2 -15 = 0 \Rightarrow$ rang $A' \neq 3 \Rightarrow$ rang $A' \leq 2$

és a dir $2 =$ rang $A \leq$ rang $A' \leq 2 \Rightarrow$ rang $A =$ rang $A' = 2 \Rightarrow$ sistema compatible.

Exemple :

Estudiem la compatibilitat del sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Les seves matrius associades són

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matriu A té dues columnes $\Rightarrow$ rang $A \leq 2$

i com det $A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 3 + 4 -3 -3 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A' = 3$

amb el que rang $A \neq$ rang $A' \Rightarrow$ el sistema és incompatible.

EL MÈTODE DE GAUSS DE RESOLUCIÓ DE SISTEMES.

SISTEMES EQUIVALENTS I TRANSFORMACIONS ELEMENTALS.

Dos sistemes lineals es diu que són
sistemes equivalents ⇔ tenen les mateixes incògnites i les mateixes solucions .

Per **transformacions elementals**, entendrem a aquelles modificacions que podem realitzar al sistema, o a la seva matriu ampliada, obtenint com a resultat un sistema equivalent a l'inicial.

D'entre els canvis que podem fer a que a un sistema sense que se li modifiquin les solucions - Transformacions elementals - , ens interessarem per les següents

a **Suprimir una equació que estigui formada exclusivament per zeros**.
b **Canviar l'ordre de les equacions**.
c **Substituir una incògnita pel seu valor**.
d **Multiplicar o dividir una equació un nombre real diferent de zero**.
e **Sumar a una equació del sistema un altra multiplicada per un nombre**.

I plicant successives vegades les transformacions d i e, podem reformular aquesta última, i enunciar-la com:

> **Sumar a una equació del sistema una combinació lineal de les altres equacions del sistema**.

Utilitzaran la terminologia matricial, i referint nos a la matriu ampliada del sistema, les transformacions elementals les podem expressar com:

- Si suprimim una fila de la matriu ampliada que estigui formada exclusivament per zeros, el resultat és la matriu d'un sistema equivalent.

- Si permutem entre sí dues files, el resultat és un sistema equivalent.

- Si multipliquem tota una fila per un nombre diferent de zero, el resultat és un sistema equivalent.

- Si a una fila de la matriu ampliada, li sumem una combinació lineal de les altres files, el resultat és la matriu ampliada d'un sistema equivalent al primer

Observeu que, donat un sistema lineal, les transformacions elementals, ens permetem utilitzar el mètode de Gauss i trobar un sistema equivalent, amb una matriu triangular; llavors fent la substitució de cada incògnita pel seu valor, podem resoldre el sistema.

Exemple 1 :

Resoldre, pel mètode de Gauss, el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

La seva matriu ampliada és
$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Deixem igual la fila tres ($F_3 = E_3$), sumem a la fila dos la fila tres ($F_2 = E_2 + E_3$) restem a la fila 1 nou cops la fila tres ($F_1 = E_1 - 3E_3$), la matriu ampliada es transforma en:
$$\begin{array}{l} F_1 = E_1 - 3E_3 \\ F_2 = E_2 + E_3 \\ F_3 = E_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Deixant intactes les files 3 i 2 ($G_3= F_3$ i $G_2 = F_2$) i sumant a la fila 1 1/2 de la segona ($G_1 = F_1 + 1/2\, F_2$)
$$\begin{array}{l} G_1 = E_1 + 1/2\, F_2 \\ G_2 = F_2 \\ G_3 = F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Que és la matriu ampliada del sistema
$$\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

De la primera equació $x = 4/2 \Rightarrow x = 2$.
Substituint a la segona equació $2 + y = 5$ i isolant dona $y = 5 - 2 \Rightarrow y = 3$.

Per tant, és un sistema compatible i la seva solució és $x=2$ i $y=3$.

Exemple 2 :

Resoldrem el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

La seva matriu és:
$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Si fem $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1$ i $F_3 = E_3 - E_1$, obtenim
$$\begin{array}{l} F_1 = E_1 \\ F_2 = E_2 - E_1 \\ F_3 = E_3 - E_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

I , si ara, $G_1 = F_1$, $G_2 = F_2$ i $G_3 = F_3 + 1/3\ F_2$, tindrem que:

$$\begin{array}{l} G_1 = F_1 \\ G_2 = F_2 \\ G_3 = F_3 + 1/3\ F_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Que correspon al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ -3y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$

sistema que òbviament és incompatible.

SISTEMES DETERMINATS I SISTEMES INDETERMINATS.

Considerem un sistema lineal com el (1), si el sistema és compatible (admet solució) es diu que és un:

sistema determinat ⇔ admet solució única en $x_1,x_2,..,x_n$.

sistema indeterminat ⇔ admet més d'una solució en $x_1,..,x_n$.

Exemple 1:

Resolent el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ pel mètode de Gauss, tenim que és equivalent a

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x \quad = 2 \end{cases}$

isolant la x, tenim que x=1 i substituint a la primera equació 1+y=1, amb la qual cosa y=0.

I és clar que no té cap més solució, per tant és un sistema compatible determinat.

Exemple 2:

Resolem el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

si a la segona equació li restem dos cops la primera, tenim que el sistema és equivalent a:

$x + y = 1$.

Si isolem la x , tenim que : $x = 1 - y$.

Per tant, si donem a la y qualsevol valor real, sempre trobem una x, de manera que substituïts al sistema el transformen en una igualtat certa. ⇒ el sistema és compatible indeterminat.

REGLA DE CRAMER (n equacions amb n incògnites).

Si tenim un sistema lineal de n equacions amb n incògnites en la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad .... \\ \quad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + .. + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Diem que és un **sistema de Cramer $\Leftrightarrow$ det A $\neq$ 0**.

Tot sistema de Cramer és compatible determinat i el valor de la incògnita i-èssima és el determinant que resulta de substituir la columna i-èssima de la matriu A, per la columna de termes independents, partit pel valor del determinant de A.

És a dir:

$$\mathbf{x_i} = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, .. , \vec{b}, .. , \vec{a}_n)}{\mathbf{det\ A}} = \frac{\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad i \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{... \ b_1} & \mathbf{... \ a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{... \ b_2} & \mathbf{... \ a_{2n}} \\ & \mathbf{.............} & & \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{... \ b_n} & \mathbf{... \ a_{nn}} \end{vmatrix} \end{array}}{\mathbf{det\ A}}$$

Ja que:

Expressem el sistema en la forma matricial: $A\,\vec{x} = \vec{b}$ (2)

Si el sistema és de Cramer $\Rightarrow$ det A $\neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

Sigui A^{-1} la inversa de A, multiplicant per l'esquerra l'expressió (2) , tenim que:

$$A^{-1}(A\,\vec{x}\,) = A^{-1}\,\vec{b}$$

per la propietat associativa del producte matricial:

$$(A^{-1}A)\,\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$$

per ser A^{-1} i A inverses: $I\,\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$

i com I és l'element neutre del producte de matrius:

$$\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}\ .$$

Tenim que: el vector dels termes independents és la imatge d'un vector per una aplicació lineal per tant és únic $\Rightarrow$ el sistema és compatible determinat.

Per determinar cada un dels valors de les x_i, trobarem en primer lloc la matriu A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .. & A_{n2} \\ : & : & : & : \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

on els A_{ij} són els adjunts de A^t .

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .. & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+..+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+..+A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+..+A_{nn}b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

i expressant-ho component a component, obtenim:

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+..+A_{n1}b_n}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+..+A_{nn}b_n}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$$

Exemple 1:

Estudiem $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

La seves matrius associades són $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Com $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 -1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ és un sistema de Cramer.

És compatible determinat i

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \quad \text{i} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

Exemple 2 :

Estudiem $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

Com $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ és un sistema de Cramer $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ és compatible determinat.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

SISTEMES AMB m EQUACIONS, n INCÒGNITES I RANG r .

Considerem el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

de m equacions i n incògnites i en el qual rang A = r.

Si rang A = rang A' = r el sistema és compatible, i per resoldre'l podem seguir el mètode següent:

Per ser **rang A = rang A' = r** $\Rightarrow$ hi ha un menor d'ordre r no nul a la matriu A.

Sense perdre generalitat i per no complicar la terminologia, podem suposar que el menor d'ordre r no nul és el

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2r} \\ & :::::::::::: & & \\ a_{r1} & a_{r2} & .. & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

De les files que formen part d'aquest menor, en diem **equacions principals**, ja que les altres files (equacions) seran combinació lineal d'aquestes.

És clar que el sistema de les equacions principals és equivalent al sistema inicial.

Així doncs el sistema (1) és equivalent a:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+\; a_{12}x_2 \;+ .. +\; a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \;+\; a_{22}x_2 \;+ .. +\; a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad :::::::::::::::::::::::::: \\ a_{r1}x_1 \;+\; a_{r2}x_2 \;+ . . +\; a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right. \qquad (2)$$

A les incògnites que acompanyen els coeficients que donen lloc a aquest menor no nul, les anomenem **incògnites principals**; mentre que, les n-r incògnites restants, les prenem com a paràmetres i les suposem conegudes.

Llavors, prenent x_1 , x_2 , .. , x_r , com a incògnites i a x_{r+1}, ..., x_m com a números reals coneguts, el sistema queda en la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +..+ a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - .. - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +..+ a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - .. - a_{2n}x_n \\ \quad ::: \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 +.. + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - .. - a_{rn}x_n \end{array}\right. \qquad (3)$$

La seva matriu ampliada és:

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11}\;\; a_{12}\; ..\; a_{1r} & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - .. - a_{1n}x_n \\ a_{21}\;\; a_{22}\; ..\; a_{2r} & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - .. - a_{2n}x_n \\ :::::::::: & :::::: \\ a_{r1}\;\; a_{r2}\; ..\; a_{rr} & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - .. - a_{rn}x_n \end{array}\right)$$

El determinant de la matriu de coeficients, és el menor d'ordre r no nul del qual hem partit; per tant, si considerem x_{r+1},..,x_n com a paràmetres, el sistema format per les equacions principals i les incògnites principals, és un sistema de r equacions, r incògnites i det matriu de coeficient $\neq 0 \Rightarrow$ cada x_i i=1,..,r es pot calcular en la forma:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-..-a_{1n}x_n & .. & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & .. & b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-..-a_{2n}x_n & .. & a_{2r} \\ .... & & & . & .. & \\ a_{r1} & a_{r2} & .. & b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-..-a_{rn}x_n & .. & a_{rn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2r} \\ ::::::::::::: & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & .. & a_{rr} \end{vmatrix}} = \text{combinació lineal de } 1, x_{r+1},..,x_n$$

Observeu que x_1,..,x_r queden determinades quan es coneixen x_{r+1},..,x_n , les quals poden prendre qualsevol valor real. Per tant el sistema és compatible indeterminat i queden n-r incògnites lliures; per aquesta raó es diu que el sistema té **n-r graus de llibertat**.

Exemple:

Resolem el sistema: $\begin{cases} 2x + 2z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 4 \\ 2y = -3 \end{cases}$

la seva matriu ampliada és $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$

- Estudiem en primer lloc la seva compatibilitat.

rang A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow 2 \leq \text{rang } A.$

si orlem aquest menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{rang } A = 2.$$

rang A' $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (té dues columnes iguals) $\Rightarrow$ rang A' ≤ 3.

per la mateixa raó de tenir dues columnes iguals, sols cal estudiar els menors:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } A' \neq 3.$$

Per tant: $2 = \text{rang } A \leq \text{rang } A' \neq 3 \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A' = 2 \Rightarrow$ sistema compatible.

- Ressonem-lo

El menor d'ordre 2 que és $\neq 0$ és el $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow$

les equacions principals són la 2 i la 3 , i les incògnites principals són y i z; la incògnita x la considerem com un valor conegut.

El sistema a resoldre és el $\begin{cases} y + z = 1 - x \\ -y + z = 4 - x \end{cases}$

Si el resolem per la regla de Cramer tindrem que:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 4-x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-x-4+x}{2} = \frac{-3}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ -1 & 4-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4-x+1-x}{2} = \frac{5-2x}{2} = \frac{5}{2} - x$$

i $x \in R$ (pot prendre qualsevol valor real).

DISCUSSIÓ DE SISTEMES - TEOREMA DE ROUCHE.

Com a conseqüència de les propietats anteriors, podem enunciar el següent teorema:

Donat un sistema lineal de m equacions amb n incògnites es compleix que:

és compatible determinat $\Leftrightarrow$ rang A = rang A' = número d'incògnites $\Leftrightarrow$ r = n .

és compatible indeterminat $\Leftrightarrow$ rang A = rang A' < número d'incògnites $\Leftrightarrow$ r < n
i en aquest cas:
hi ha r incògnites que es poden posar com una combinació lineal de les altres n-r incògnites, que poden prendre qualsevol valor real. Per això es diu que el sistema té m-r graus de llibertat.

Exemple:

Discutirem la compatibilitat del següent sistema, en funció del valor del paràmetre α.

$$\begin{cases} \alpha x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = \alpha \\ 2x + \alpha y = 3 \end{cases}$$

La seva matriu associada és: $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 3 & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 3 \end{array}\right)$

Estudiem els rangs.

rang A: A sols té dues columnes $\Rightarrow$ rang A ≤ 2

$$\begin{vmatrix} \alpha & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 9 \qquad \begin{vmatrix} \alpha & 3 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 6 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha - 4$$

És clar que cap valor de α anul·la els tres menors alhora $\Rightarrow$ rang A = 2.

rang A' : com a molt té rang 3.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 3 & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 3 \end{vmatrix} = 6\alpha + 6\alpha + 6\alpha - 8 - \alpha^3 - 27 = -(\alpha+5)(\alpha^2 - 5\alpha + 7)$$

Sols és zero per $\alpha = -5$.

Distingim dos casos:

- **Si $\alpha = -5$:** 2 = rang A $\leq$ rang A' $\neq$ 3 $\Rightarrow$ rang A = rang A' = 2 = núm incòg. $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ sistema compatible determinat.

- **Si $\alpha \neq -5$:** 2 = rang A $\neq$ 3 = rang A' $\Rightarrow$ sistema incompatible.

SISTEMES HOMOGENIS.

Un sistema lineal es diu homogeni $\Leftrightarrow$ tots els seus termes independents són tots 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Observeu que en un sistema homogeni, el rang de la matriu de coeficients, sempre coincideix amb el de la matriu ampliada. És clar, també, que un sistema homogeni, sempre té la solució trivial $x_1 = 0$,.., $x_n = 0$.
Per aquesta raó, s'acostuma a utilitzar la següent nomenclatura:

Homogeni incompatible $\Leftrightarrow$ sols admet la solució $x_1 = 0$, . . . , $x_n = 0$
$\Leftrightarrow$ rang A = número d'incògnites.

Homogeni compatible $\Leftrightarrow$ té solucions diferents de la trivial
$\Leftrightarrow$ rang A < número incògnites.

Homogeni compatible determinat $\Leftrightarrow$ el sistema té una única incògnita lliure
$\Leftrightarrow$ rang A = núm incòg - 1.

Exemple:

Estudiem el sistema homogeni següent en funció del paràmetre α.

$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 0 \\ 2x + y + \alpha z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

La seva matriu associada és $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Com $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow 2 \leq \text{rang } A$ i $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\alpha$.

Distingim dos casos:

- **Si $\alpha \neq 0$** $\Rightarrow$ det A $\neq 0$ $\Rightarrow$ rang A = 3 $\Rightarrow$ sistema homogeni incompatible $\Rightarrow$ l'única solució és la x=0 , y=0 , z= 0 .
- **Si $\alpha = 0$** $\Rightarrow$ det A= 0 $\Rightarrow$ rang A$\neq$3 $\Rightarrow$ rang A $\leq$ 2 $\Rightarrow$ rang A=2=núm incòg - 1 $\Rightarrow$ sistema homogeni compatible determinat.
  Per resoldre'l, considerem el sistema format per les equacions principals i les incògnites principals:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3z \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{3z}{-6} = \frac{-z}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3z \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6z}{-6} = z$$

És a dir , la solució és $x = - z/2$, $y = z$ i $z \in R$.