RELACIONS

Si tenim A i B conjunts no buits, entendrem per relació entre els elements de A i B, a qualsevol llei o criteri que associa elements de A amb elements de B.

Exemples:

Si A i B són els conjunts A = {sabates} i B = {persones} , una relació que podem establir entre elements de A i B pot ser la de "ser portada per".

$x \in A$ i $y \in B$ x ***R*** y $\Leftrightarrow$ x "es portada per" y .

Si E= {estacions del metro} i $x,y \in E$ una de les relacions entre elements de E pot ser x ***R*** y $\Leftrightarrow$ x i y són de la mateixa línia .

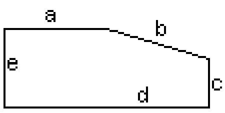
Si $m,n \in$ ***Z*** ={enters} alguna de les relacions que podem establir són

m ***R*** n $\Leftrightarrow$ m divideix n . o m ***S*** n $\Leftrightarrow$ m>n , o m ***T*** n $\Leftrightarrow$ $m \geq n$, ...

Observeu que cada element de A pot estar, o no, relacionat amb cada un dels elements de B.

Les relacions d'elements de A i B les acostumem a representar donant el conjunt de parells ordenats d'elements de A x B que estan relacionats, conjunt que se'n diu **graf** de la relació; sovint donem la relació amb uns eixos cartesians de A x B, marcant de forma clara els elements relacionats; també s'acostumen a donar les relacions amb fletxes que van dels elements del conjunt A als elements de B amb qui estan relacionats.

Exemple:

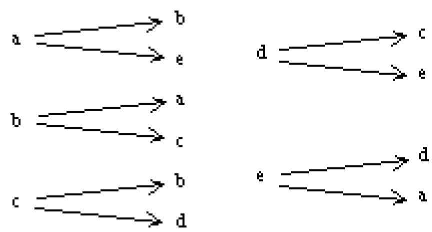


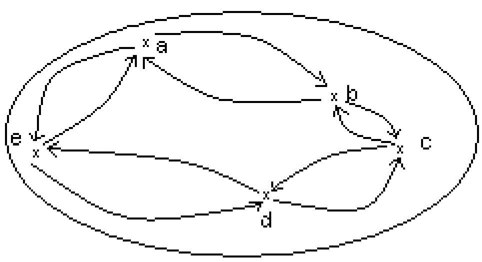
Considerem el conjunt dels costat de la figura i la relació entre costats x ***R*** y $\Leftrightarrow$ x i y tenen un vèrtex comú

El graf de la relació és {(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,a), (a,e),(e,d), (d,c), (c,b), (b,a)}. que en uns eixos cartesians és

AxA	a	b	c	d	e
a		X			X
b	X		X		
c		X		X	
d			X		X
e	X			X	

Si l'expressem la relació en forma de fletxes és





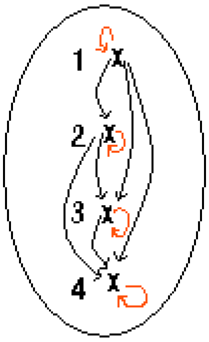
i amb les fletxes expressades en un diagrama de Venn.

Propietats que pot complir una relació de A en A
Si tenim ***R*** una relació entre els elements d'un conjunt A, diem que ***R*** te la propietat

Reflexiva
quan tot element de A està relacionat amb ell mateix.
Es a dir $\quad$ ***R*** reflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A \;\; x\, \boldsymbol{R}\, x$
Per **exemple** si A={1, 2, 3, 4 } la relació x ***R*** y ⇔ x és menor o igual a y , té la propietat reflexiva.
Els parells ordenats d'elements relacionats són
{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)}

Si la relació està expressada amb eixos cartesians és

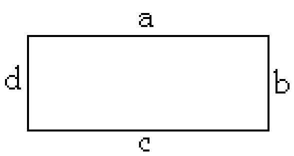
	1	2	3	4
1	x			
2	x	x		
3	x	x	x	
4	x	x	x	x



quan està donada amb diagrames de Venn, de cada element en surt un llaç.

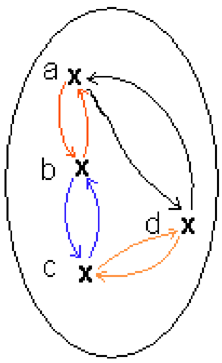
Simètrica
Diem que una relació té la propietat simètrica si quan un element x està relacionat amb y llavors aquest y està relacionat amb x.
És a dir $\forall x,y \in A \;\Leftrightarrow\; [\, x\, \boldsymbol{R}\, y \Rightarrow y\, \boldsymbol{R}\, x \,]$

Per **exemple** si considerem el conjunt dels costats a, b, c, d d'un rectangle i la relació dos costats estan relacionats si són perpendiculars, aquesta relació és clarament simètrica.



Els parells ordenats relacionats són
{ (a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,a), (a,d)}

donada amb diagrames de Venn,

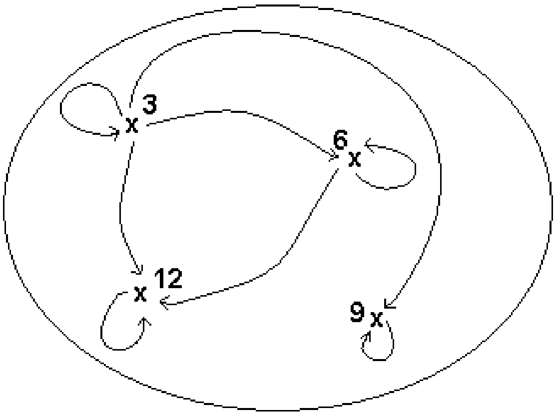


Transitiva

Diem que una relació és transitiva si quan un primer element x està relacionat amb un segon y i aquest segon y està relacionat amb un tercer z , el primer x està relacionat amb el tercer z.

Es a dir: $x \, \boldsymbol{R} \, y$ i $y \, \boldsymbol{R} \, z \Rightarrow x \, \boldsymbol{R} \, z$.

Per **exemple** si considerem A={3, 6, 9, 12} i la relació $x \, \boldsymbol{D} \, y \Leftrightarrow$ x és divisor de y, tenim que els parells ordenats d'elements relacionats són {(3,3), (3,6), (3,9), (3,12), (6,6), (6,12), (9,9), (12,12)}



Expressada en un diagrama de Venn, s'observa que al haver-hi les fletxes de 3 a 6 i de 6 a 12, també hi ha la de 3 a 12.

Anti-simètrica

Diem que una relació té la propietat anti-simètrica, si quan tenim dos elements diferents, si el primer està relacionat amb el segon el segon no està relacionat amb el primer.

És a dir $x \neq y$ i $x \, \boldsymbol{R} \, y \Rightarrow$ no $y \, \boldsymbol{R} \, x$

o el que és el mateix: $x \, \boldsymbol{R} \, y$ i $y \, \boldsymbol{R} \, x \Rightarrow x=y$

Per exemple el conjunt A={1, 2, 3, 4} amb la relació donada pel criteri menor o igual és clarament anti-simètrica.

Relació d'equivalència

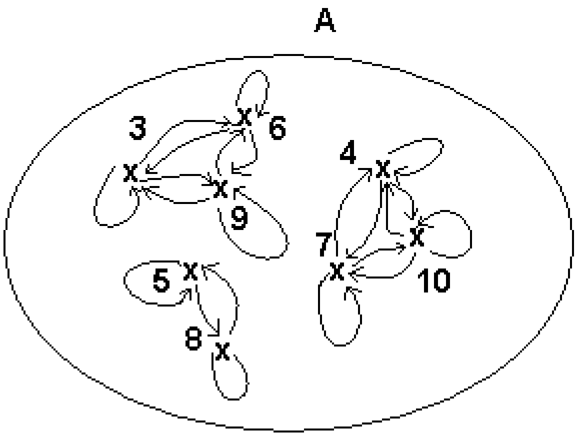
Una relació es diu que és d'equivalència quan és reflexiva, simètrica i transitiva.

$$\boldsymbol{R} \text{ és d'equivalència} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{R} \text{ reflexiva} \\ \boldsymbol{R} \text{ simètrica} \\ \boldsymbol{R} \text{ transitiva} \end{cases}$$

Exemple per A={ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} amb la relació dos elements de A estan relacionats quan al dividir-los per 3 tenen el mateix residu, és una relació d'equivalència.

Els elements 3, 6, 9 estan relacionats al tenir residu 0; com 4, 7, 10 donen de residu 1, també estan relacionats entre ells i finalment el 5 i 8 estan relacionats.
És obvi que tot element dona el mateix residu que ell mateix, per tant és **reflexiva**; també és clar que és **simètrica**; i finalment és **transitiva** ja que si un element x dividit per 3 dona el mateix residu que un element y dividit per 3 i aquest és el mateix que el d'un cert z , el residu de x i el del z serà igual.

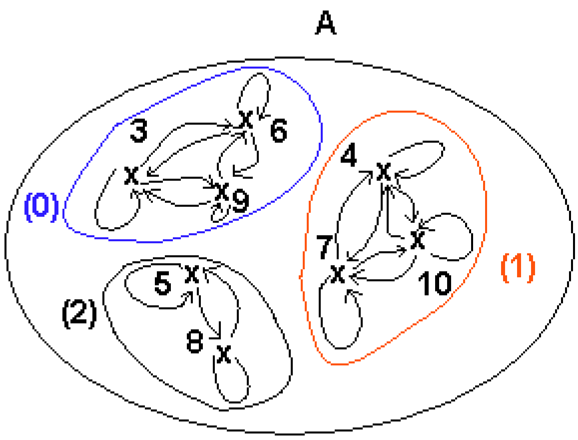
Si l'expressen amb fletxes sobre un diagrama de Venn és



Classes d'equivalència i conjunt quocient
Si A és un conjunt en el que hi tenim definida una relació d'equivalència, podem considerar els subconjunts de A formats per tots els elements que estan relacionats entre ells, de cada un d'aquests subconjunts en diem una classe d'equivalència.
Es fàcil de comprovar que no hi ha classes buides, que dues classes diferents són sempre disjuntes i que la reunió de totes les classes és tot el conjunt A.

Del conjunt de les classes d'equivalència n'acostumem a dir-ne **conjunt quocient** i el representem com A/***R***.

En l'exemple anterior, podem distingir clarament les classes (0)={3, 6, 9} (1) ={4,7,10} i (2)={5, 8} .



Tenim que el conjunt quocient és:
A/(3)={(0), (1) i (2)}.

Relació d'ordre

Diem que una relació ***R*** definida sobre un conjunt A és una relació d'ordre quan té les propietats reflexiva, anti-simètrica i transitiva.

És a dir: ***R*** és relació d'**ordre** $\Leftrightarrow \begin{cases} R \text{ reflexiva} \\ R \text{ anti-simètrica} \\ R \text{ transitiva} \end{cases}$

Per **exemple** si A={1, 2, 3, 4 } la relació x ***R*** y $\Leftrightarrow$ x és menor o igual a y és una relació d'ordre.
Una relació d'ordre es diu que és d'ordre **total** quan donats dos elements qualssevol, sempre existeix una relació entre ells, mentre que diem que és un ordre **parcial** si hi ha elements del conjunt que no tenen cap tipus de relació.

Exemple La relació "ser divisor" entre naturals , és una relació d'ordre parcial.
Està clar que a ***R*** b $\Leftrightarrow$ a divideix b es el mateix que

$$a\, R\, b \Leftrightarrow \exists\, m \in N \mid b = m\cdot a$$

Comprovem quines propietats té

És reflexiva ja que $\forall a \in N \;\; \exists 1 \in N$ i $a = 1\cdot a$

És anti-simètrica:

$$\left.\begin{array}{l} a\, R\, b \Rightarrow \exists m \in N \;\; b = m\cdot a \\ b\, R\, a \Rightarrow \exists n \in N \;\; a = n\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow b = m\cdot(n\cdot b) \Rightarrow b = (m\cdot n)\cdot b \Rightarrow m\cdot n = 1$$

Com m i n só naturals $\Rightarrow$ m=1 i n =1
Amb el que b=1·a

És transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} a\, R\, b \Rightarrow \exists m \in N \;\; b = m\cdot a \\ b\, R\, c \Rightarrow \exists n \in N \;\; c = n\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow c = n\cdot(m\cdot a) = (n\cdot m)\cdot a \Rightarrow c\, R\, a$$

Amb el que és reflexiva, antisimètrica i transitiva, i per tants és una relació d'ordre.

Com 3 no divideix a 2 i 2 no divideix a 3 , hi ha elements que no estan relacionats. És doncs un ordre parcial.

APLICACIÓ

Si tenim A i B conjunts no buits, anomenarem **aplicació** del conjunt A al conjunt B, a tota vol llei, criteri o fórmula que associa a cada element de A un únic element de B.

Observeu que podríem haver definit una **aplicació** com una relació entre A i B, on per a cada element de A hi ha un únic element de B amb qui està relacionat.
És a dir: $\forall x \in A \Rightarrow \exists y \in B \mid x \boldsymbol{R} y$.
Si tenim una x de A, a l'únic element de B que li correspon li diem imatge de x; si a l'aplicació l'hem anomenat f, hi ho acostumem a expressar com

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

El conjunt de les imatges l'acostumem a expressar com $f(A)=\{y \in B \mid y=f(x)\}$

Exemples

- Si a cada un dels alumnes d'una classe li assignem el dia en que va néixer, tenim una aplicació entre persones i dies.
- Si a cada un dels alumnes d'una classe li assignem el seu nom, tenim una aplicació entre persones i noms.
- Si a cada cotxe li associem els kms que ha recorregut, tenim una aplicació entre cotxes i números.
- Si a cada número real li assignem el seu quadrat, tenim una aplicació entre números.

Tipus d'aplicació

Injectiva

Una aplicació f de A en B diem que és injectiva $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ elements diferents tenen imatges diferents $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemples

- La aplicació que assigna a cada element químic el seu número atòmic.
- La aplicació dels real als reals que a cada x li assigna x+5.
- La aplicació que assigna a cada persona el seu pes en kg**, no és injectiva** ja que persones diferents poden tenir el mateix pes.

Exhaustiva

Una aplicació f de A en B diem que és exhaustiva $\Leftrightarrow$ tot element de B és imatge d'algun element de A$\Leftrightarrow \forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A$ i $y=f(x) \Leftrightarrow B=f(A)$

Exemples

- La aplicació dels real als reals que a cada x li assigna x+5, és exhaustiva, ja que donat un real y qualsevol sempre podem expressar-lo com y = (y-5)+5.
- La aplicació que assigna a cada persona el seu pes en **kg no és exhaustiva**, ja que no hi ha cap persona que pesi 912 kg.

Bijectiva

Diem que una aplicació f és bijectiva $\Leftrightarrow$ f injectiva i exhaustiva.
Per exemple la aplicació dels real als reals que a cada x li assigna x+5.

Composició d'aplicacions.

Si tenim dues aplicacions $f:A \longrightarrow B$ i $g:C \longrightarrow D$
$x \longrightarrow f(x)=u$ $u \longrightarrow g(u)=y$

Quan B és un subconjunt de C, podem considerar

$$A \xrightarrow{f} B \subset C \xrightarrow{g} D$$
$$x \longrightarrow f(x)=u \longrightarrow g(u)=g(f(x))$$

és a dir:

$$A \longrightarrow D$$
$$x \longrightarrow g(f(x))$$

nova aplicació de A en B, que anomenem composició de f amb g i expressem com $g \circ f$.

Es pot comprovar que la composició d'aplicacions és:

- **Associativa : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$**
- En general, **no és commutativa**. **$f \circ g \neq g \circ f$**
- **Té element neutre que és l'aplicació identitat $I:A \longrightarrow A$ $f \circ I=f$ i $I \circ f=f$**
  $x \longrightarrow x$
- En general **no té element invers** .
  Però si , $f: A \longrightarrow B$ i $g:B \longrightarrow A$
  $x \longrightarrow f(x)$ $y \longrightarrow g(y)$
  compleixen que $f \circ g=I$ i $g \circ f=I$, llavors diem que f i g són **recíproques** o **inverses per la composició** $\Leftrightarrow$ en aquest cas, la g s'acostuma a designar per f^{-1} .
- f admet inversa per la composició $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

Exemple:
Si considerem les aplicacions

f :{alumnes d'una classe} $\longrightarrow$ {dies} que a cada alumne li assigna el dia en que va néixer.

g: {dies} $\longrightarrow$ {dL, dM, dX, dJ, dV, dS, dD}
que a cada dia possible li assigna si era dilluns o dimarts o ...o diumenge.

Està clar que podem considerar l'alicació
$g \circ f$: {alumnes d'una classe} $\longrightarrow$ {dL, dM, dX, dJ, dV, dS, dD}
que assigna a cada alumne quin dia de la setmana va néixer.