RANG D'UNA MATRIU .

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definim rang A = dimensió del subespai que generen els vectors columna de la matriu A.

Recordem que hem definit el rang d'una aplicació lineal f, com la dimensió del subespai Im f, que està generada per f($\vec{e}$),... f($\vec{e}_m$), que són els vectors columna de la matriu A. Per tant el concepte de rang d'una aplicació lineal, coincideix amb el del rang de la seva matriu.

MENORS D'UNA MATRIU.

Sigui A una matriu de n files x m columnes i p un enter menor o igual a n i a m; entendrem per **menor d'ordre p** de la matriu a cada un dels determinants de les matrius quadrades que resulten de suprimir n-p files i m-p columnes de la matriu A.

Exemple:

A la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

sols hi podem trobar menors d'ordre 1,2 i 3, ja que només té tres files.

Els seus menors d'ordre 3 són:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Alguns dels menors d'ordre 2 són:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

TEOREMA DEL RANG.

El rang d'una matriu és r $\Leftrightarrow$ existeix un menor M d'ordre r, diferent de zero i tots els menors d'ordre superior que s'obtenen orlant M, són zero.

Exemple:

Calculem el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Estudiem si és de rang 3,

Pel fet de que :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{no té rang } 3 \Rightarrow \text{rang } A \leq 2.$$

Mirem si és de rang 2, per això cal estudiar tots els menors d'ordre 2, però tots són zero ⇒ rang A ≤ 1.

Finalment ens queda per veure si és de rang 1, però és evident que hi ha menors d'ordre 1 diferents de zero .

Per tant ⇒ rang A = 1.

Per calcular el rang de A amb el teorema del rang, cal fer:

- Busquem un menor d'ordre 1 diferent de 0.
  Per exemple el menor 3 fila 3 columna que és 2≠0.

- Orlem aquest menor fins a obtenir-ne un d'ordre 2 que sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Com no n'hi ha cap, podem afirmar que el rang de la matriu és 1.

CÀLCUL DEL RANG PEL MÈTODE DE GAUSS

Encara podem donar un altre mètode per a calcular el rang d'una matriu, el mètode de Gauss.

Observeu que el rang d'una matriu depèn només dels menors diferents de zero, i per tant dels determinants diferents de zero. Per això, qualsevol transformació que realitzem a la matriu, que no alteri el fet que un determinant sigui zero o no, no modificarà el rang de la matriu.
Per tant podem afirmar:

- **Si a una matriu li permutem dues files, el rang no varia.**
- **Si a una matriu li multipliquem una fila per un nombre diferent de zero, el rang no varia.**
- **Si a una fila li sumem una combinació lineal de les altres files, el rang no varia.**

Aquestes propietats ens permeten calcular el rang d'una matriu sense calcular cap determinant, mitjançant el que s'anomena **Mètode de Gauss**, que consisteix en col·locar zeros per sota de la diagonal de la matriu.

Exemple:

Calcularem el rang de la matriu anterior pel mètode de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si a la segona fila li sumem la primera per 2, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si a la tercera fila li sumem la primera, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu que és obvi que té rang 1.

MATRIU INVERSA.

Recordem que el producte de matrius quadrades d'ordre n, dona una altra matriu quadrada d'ordre n, i que en aquest conjunt el producte matricial té element neutre, que és la matriu identitat. Ens qüestionarem ara sota quines condicions una matriu quadrada té inversa pel producte i com calcular-la.

TEOREMA

Una matriu A de n x n , té inversa A^{-1} ⇔ det A ≠ 0.

i en tal cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ matriu dels adjunts de } A^t .$$

Ja que :

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriu dels adjunts de A^t és :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{on } A_{ij} = \text{adjunt i}$$

Si fem el producte de les matrius A i A^*, obtenim:

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .. & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+..+a_{1n}A_{1n} & 0 & . \; . \; . & 0 \\ 0 & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+..+a_{2n}A_{2n} & . \; . \; . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \; \vdots \; \vdots & \\ 0 & 0 & & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+..+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

i per tal de que sigui la identitat, sols cal que el det A no sigui nul.
De les matrius que admeten inversa en diem invertibles o regulars.