APLICACIONS LINEALS.

Si tenim E i F , R espais vectorials, diem que:

$$\begin{array}{l} \mathbf{f : E \longrightarrow F} \text{ **és aplicació lineal** } \\ \vec{v} \longrightarrow \mathbf{f}(\vec{v}) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{[l1]} \quad \vec{u},\vec{v} \in \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{f}(\vec{u}+\vec{v}) = \mathbf{f}(\vec{u}) + \mathbf{f}(\vec{v}) \\ \textbf{[l2]} \quad \lambda \in \mathbf{R} \text{ i } \vec{v} \in \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\, \mathbf{f}(\vec{v}) \end{cases}$$

Exemples:

- $f: R \longrightarrow R$ és una aplicació lineal de R en R.
  $x \longrightarrow 5x$

  doncs:
  [l1]: $f(x + x') = 5(x + x') = 5x + 5x' = f(x) + f(x')$
  [l2] : $f(\lambda x) = 5(\lambda x) = \lambda\, 5x = \lambda f(x)$.

- $f: R^2 \longrightarrow R^3$ és una aplicació lineal de R^2 en R^3.
  $(x,y) \longrightarrow (x, -y, x+y)$

  doncs:
  [l1]: $f((x,y)+(x',y')) = f((x+x',y+y')) = (x+x',-(y+y'), (x+x')+(y+y')) =$
  $=(x+x',-y-y',(x+y)+(x'+y'))=(x, -y, x+y)+(x',-y',x'+y')=f(x,y) + f(x',y')$.

  [l2]: $f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, -\lambda y, \lambda x + \lambda y) = (\lambda x, -\lambda y, \lambda(x + y)) =$
  $=\lambda(x, -y, x + y) = \lambda f(x,y)$.

PROPIETATS.

Si $f : E \longrightarrow F$ és aplic. lin. entre E i F, es compleixen les següents:

- **$f(\vec{0}) = \vec{0}$. La imatge del $\vec{0}$ de E per l'aplic lin és el $\vec{0}$ de F.**
  ja que: $f(\vec{0}) = f(\vec{0}+\vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0}) \Rightarrow f(\vec{0})=\vec{0}$.

- **$f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.**
  ja que: $f(-\vec{v}) + f(\vec{v}) = f(-\vec{v} + \vec{v}) = f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.

- **$\{\vec{v} \in E \,/\, f(\vec{v})=\vec{0}\}$ és un subespai vectorial que se'n diu Ker (f) o Nucli (f) .**
  ja que:
  (s1) $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \text{Ker } f \Rightarrow \ker f \neq \varnothing$.
  (s2) $\vec{u}, \vec{v} \in \ker f \Rightarrow f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker } f$.
  (s3) $\lambda \in R$ i $\vec{v} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{v} \in \text{Ker } f$.

- **$f(E)=\{f(\vec{v})/\vec{v} \in E\}$ és un subespai vectorial de F que en diem Im f.**

  doncs:
  (s1) $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in$ Im f $\Rightarrow$ Im f $\neq \varnothing$.
  (s2) $\vec{u}, \vec{v} \in$ Im f $\Rightarrow \vec{u} = f(\vec{u}\,')$ i $\vec{v} = f(\vec{v}\,')$ amb $\vec{u}\,', \vec{v}\,' \in E$;
  com $\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{u}\,') + f(\vec{v}\,') = f(\vec{u}\,' + \vec{v}\,') \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in$ Im f
  (s3) $\vec{u} \in$ Im f i $\lambda \in R$ $\lambda\vec{u} = f(\lambda\vec{u}\,') = \lambda f(\vec{u}\,')$ amb $\vec{u}\,' \in E$.
  Així doncs Im f compleix les tres condicions per ésser subespai vectorial.

  Si anomenem **rang d'una aplicació lineal f**, a la dimensió del subespai Im f , tenim que: **rang f $\leq$ dim F**.

- **Im f és generat per $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), .., f(\vec{e}_n)$ on $\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n$ són base de E .**

  ja que:
  Si $\vec{v} \in$ Im f $\Rightarrow$ existeix $\vec{w} \in E$ tal que $f(\vec{w}) = \vec{v}$.
  Com $\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n$ és una base de E $\Rightarrow$ $\vec{w} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + .. + \mu_n\vec{e}_n$
  i per tant :
  $\dot{v} = f(\vec{w}) = f(\mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + .. + \mu_n\vec{e}_n) = f(\mu_1\vec{e}_1) + f(\mu_2\vec{e}_2) + .. + f(\mu_n\vec{e}_n)=$
  $= \mu_1 f(\vec{e}_1) + \mu_2 f(\vec{e}_2) + .. + \mu_n f(\vec{e}_n)$.
  Així doncs tot vector de Im f és combinació lineal de $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), .., f(\vec{e}_n)$.

  Observeu que com a conseqüència d'aquesta última propietat tenim :
  dim(Im f) $\leq$ n = dim E , és a dir: **rang f $\leq$ dim E** .

MATRIU D'UNA APLICACIÓ LINEAL.

CONCEPTE DE MATRIU.

Donats E espai vectorial dim E=m i $\vec{e}_1 ,..., \vec{e}_m$ base de E , F espai vectorial dim F=n i $\vec{u}_1, \vec{u}_2,..., \vec{u}_n$ base de F i

$$f:E \longrightarrow F \quad \text{una aplicació lineal}$$
$$\vec{v} \longrightarrow f(\vec{v})$$

f queda determinada per les imatges de $\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_m$, ja que:
si $\vec{w} \in E$ com $\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_m$ són base de E, $\vec{w} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + .. + \mu_m\vec{e}_m \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\vec{w}) = f(\mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + .. + \mu_m\vec{e}_m) = \mu_1 f(\vec{e}_1) + \mu_2 f(\vec{e}_2) +..+ \mu_m f(\vec{e}_m)$. (1)

Com $f(\vec{e}_i) \in F$, i les $\vec{u}_j$ són base de F $\Rightarrow f(\vec{e}_i)$ s'expressa com combinació lineal de $\vec{u}_j \Rightarrow$

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_{11}\vec{u}_1 + \lambda_{21}\vec{u}_2 + .. + \lambda_{n1}\vec{u}_n$$
$$f(\vec{e}_2) = \lambda_{12}\vec{u}_1 + \lambda_{22}\vec{u}_2 + .. + \lambda_{n2}\vec{u}_n$$
$$::::::::::::::::::::$$
$$f(\vec{e}_m) = \lambda_{1m}\vec{u}_1 + \lambda_{2m}\vec{u}_2 + .. + \lambda_{nm}\vec{u}_n$$

Si substituint a (1) , obtenim:

$$f(\vec{w}) = \mu_1(\lambda_{11}\vec{u}_1 + \lambda_{21}\vec{u}_2 +. .+ \lambda_{n1}\vec{u}_n) + \mu_2(\lambda_{12}\vec{u}_1 + \lambda_{22}\vec{u}_2 + ..+ \lambda_{n2}\vec{u}_n) + ... +$$
$$+ \mu_n(\lambda_{1m}\vec{u}_1 + \lambda_{2m}\vec{u}_2 + .. + \lambda_{nm}\vec{u}_n).$$

I operant :

$f(\vec{w}) = (\mu_1\lambda_{11} + \mu_2\lambda_{12} + .. + \mu_m\lambda_{1m})\ \vec{u}_1 + (\mu_1\lambda_{21} + \mu_2\lambda_{22} + .. + \mu_m\lambda_{2m})\ \vec{u}_2 + .. +$
$+ (\mu_1\lambda_{n1} + \mu_2\lambda_{n2} + .. + \mu_m\lambda_{nm})\ \vec{u}_n$. (2)

Amb el que l'aplicació f, queda determinada quan es coneixen aquestes (λ_{ij}), que són les components de les imatges de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$, en la base de les $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.

Del conjunt de les λ_{ij} , ordenades en la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ & :::::::::::: & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{f}$$

en diem matriu de n files per m columnes de l'aplicació f, en les respectives bases de E i F.

Terminologia de les matrius:

Fila i - èssima : ($\lambda_{i1}\quad \lambda_{i2}\ \dots\ \lambda_{im}$) .

Columna j - èssima: $\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ . \\ : \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix}$.

Element i j és l'element que ocupa la fila i i la columna j , és a dir és el λ_{ij} .

Ordre: és el número de files i columnes que té la matriu.
Observeu que per construir la matriu, sols ens cal posar en forma de columna les components del vector $f(\vec{e}_i)$, és a dir:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ & ::::::::::: & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \dots.\ f(\vec{e}_m) \end{array}$$

Una primera utilitat de les matrius, està en el càlcul de la imatge d'un vector.

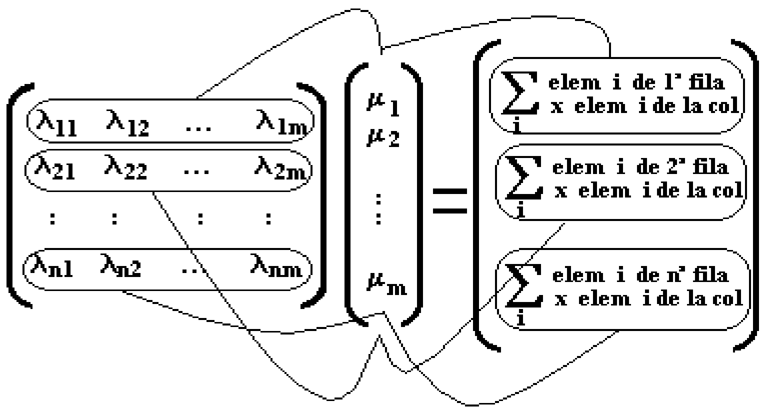
Ja que si f és l'aplicació lineal de la propietat anterior, tindrem que, per (2) la imatge d'un vector $\vec{w} = (\mu_1, \mu_2, .., \mu_m)$ és

$f(\vec{w}) = (\mu_1\lambda_{11} + \mu_2\lambda_{12} + .. + \mu_m\lambda_{1m})\vec{u}_1 + (\mu_1\lambda_{21} + \mu_2\lambda_{22} + .. + \mu_m\lambda_{2m})\vec{u}_2 + .. +$
$+ (\mu_1\lambda_{n1} + \mu_2\lambda_{n2} + .. + \mu_m\lambda_{nm})\vec{u}_n$.

Aquesta expressió, que té una certa dificultat de ser recordada; però si posem les components del vector $\vec{w}$ i de f($\vec{w}$) en forma de columnes

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1\lambda_{11} + \mu_2\lambda_{12} + .. + \mu_m\lambda_{1m} \\ \mu_1\lambda_{21} + \mu_2\lambda_{22} + .. + \mu_m\lambda_{2m} \\ . \\ \vdots \\ \mu_1\lambda_{n1} + \mu_2\lambda_{n2} + .. + \mu_m\lambda_{nm} \end{pmatrix} .$$

s'observa que cada una de les components del vector resultant, surt de fer la suma dels productes dels elements de la primera fila, pels elements de la columna:



Exemple:

Considerem una aplicació lineal $f:R^3 \longrightarrow R^4$ de manera que $f(1,0,0) = (1,2,3,4)$, $f(0,1,0) = (1,-2,2,-1)$ i $f(0,0,1) = (0,5,0,0)$.

Per trobar la imatge del vector (1,-2,3) ho podem fer de dues formes:

- Primera utilitzant la definició d'aplicació lineal.

  $f(1,-2,3) = f((1,0,0) - 2(0,1,0) + 3(0,0,1)) = f(1,0,0) - 2f(0,1,0) + 3f(0,0,1) =$

  $= (1,2,3,4) - 2(1,-2,2,-1) + 3(0,5,0,0) = (1,2,3,4) + (-2,4,-4,2) + (0,15,0,0) =$

  $= (-1,21,-1,6)$.

  per tant $f(1,-2,3)=(-1,21,-1,6)$.

- Segona utilitzant la matriu de l'aplicació.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot3 \\ 1\cdot2 + (-2)\cdot(-2) + 5\cdot3 \\ 3\cdot1 + 2\cdot(-2) + 0\cdot3 \\ 4\cdot1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

SUMA DE MATRIUS.

Si f i g són dues aplicacions lineals de E en F , dim E = m i dim F = n

$\Rightarrow$ l'aplicació $\mathbf{f + g : E \longrightarrow F}$ **és lineal**

$$\vec{v} \longrightarrow f(\vec{v})+g(\vec{v})$$

i

$$\text{si} \quad f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$f + g \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Per aquesta raó, de la matriu de f + g, en diem **matriu A + B** .

Ja que:

- Comprovem que f + g és lineal:
  (l1) $(f+g)(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}+\vec{v}) + g(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) + g(\vec{u}) + g(\vec{v}) =$
  $= f(\vec{u}) + g(\vec{u}) + f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = (f+g)(\vec{u}) + (f+g)(\vec{v})$.
  (l2) $(f+g)(\lambda\vec{u}) = f(\lambda\vec{u}) + g(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) + \lambda g(\vec{u}) = \lambda(f(\vec{u}) + g(\vec{u})) = \lambda(f+g)(\vec{u})$
  Per tant (f+g) és lineal.

- Per trobar la matriu de f+g, n'hi ha prou en calcular les imatges dels vectors de la base de E .
  Sigui $\vec{e}_i$ el i-èssim vector de la base de E, per definició de matriu tenim que:

$$f(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ : \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ : \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\text{i com } (f+g)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i) + g(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} + b_{1i} \\ a_{2i} + b_{2i} \\ : \\ a_{ni} + b_{ni} \end{pmatrix}$$

Amb el que deduïm que la matriu de f + g és l'esmentada a l'enunciat.

PROPIETATS DE LA SUMA DE MATRIUS

Si M_{nm} és el conjunt de matrius de n files per m columnes, és fàcil de comprovar que la suma de matrius de M_{nm} és una operació interna, que és:

- **Associativa: A + (B + C) = (A + B) + C .**
- **Commutativa: A + B = B + A .**
- **Té element neutre: la matriu 0, formada per 0, compleix que 0 + A = A .**
- **Té element oposat: si A = (a_{ij}), la matriu - A= ($-a_{ij}$) compleix que A+(-A)=0.**

Per tant M_{nm} amb la suma és un **grup abelià**.

PRODUCTE PER ESCALARS .

Si f : E $\longrightarrow$ F és una aplicació lineal i $\lambda \in R$

$\vec{v} \longrightarrow$ **f($\vec{v}$)**

L'aplicació $\lambda\cdot f$: E $\longrightarrow$ F és lineal

$\vec{v} \longrightarrow$ **λf($\vec{v}$)**

i si

$$f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda f \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Per aquesta raó, de la matriu de $\lambda\cdot f$, en diem **matriu $\lambda\cdot A$.**

Demostració:

- Comprovem que $\lambda\cdot f$ és lineal:
  (l1) $(\lambda\cdot f)(\vec{u} + \vec{v}) = (\lambda\, f(\vec{u} + \vec{v})) = \lambda(f(\vec{u}) + f(\vec{v})) = \lambda f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$.
  (l2) Si $\mu \in R$ $(\lambda\cdot f)(\mu\vec{v}) = \lambda(f(\mu\vec{v})) = \lambda\mu f(\vec{v}) = \mu(\lambda f(\vec{v})) = \mu(\lambda f)(\vec{v})$.

  Per tant $\lambda\cdot f$ és lineal.

- Per calcular la matriu de $\lambda\cdot f$, n'hi ha prou en trobar les imatges dels vectors de la base de E .
  Sigui $\vec{e}_i$ el i-èssim vector de la base de E, per definició de matriu tindrem que:

$$f(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ i com } (\lambda\cdot f)(\vec{e}_i) = \lambda\cdot(f(\vec{e}_i) = \lambda \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1i} \\ \lambda a_{2i} \\ \vdots \\ \lambda a_{ni} \end{pmatrix}$$

i per tant la matriu de $\lambda\cdot f$ és la de l'enunciat.

Es pot comprovar que el conjunt de les matrius M_{nm} és un R espai vectorial amb la suma i el producte per escalars definits anteriorment.

COMPOSICIÓ D'APLIC. LINEALS - PRODUCTE MATRICIAL.

Siguin E_m , E_p i E_n espais vectorials de dimensions m, p i n ,
i $f : E_m \longrightarrow E_p$ i $g : E_p \longrightarrow E_n$ aplicacions lineals

$$\vec{v} \longrightarrow f(\vec{v}) \qquad \vec{w} \longrightarrow g(\vec{w})$$

llavors l'aplicació $g \circ f : E_m \longrightarrow E_n$ **és lineal**

$$\vec{v} \longrightarrow g(f(\vec{v}))$$

i si

$$f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \leftrightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \qquad \text{on } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ki}\, b_{jk} \qquad \begin{matrix} i=1,..,n \\ j=1,..,m \end{matrix}$$

D'aquesta matriu C se'n diu matriu producte de B per A, $C = B\cdot A$.

Ja que:

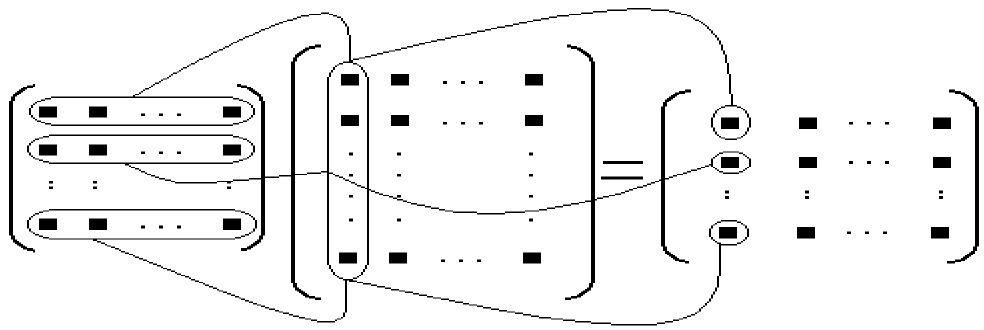
- $g \circ f$ és lineal:
  (l1) $(g\circ f)(\vec{u}+\vec{v})=g(f(\vec{u}+\vec{v}))=g(f(\vec{u})+f(\vec{v}))=g(f(\vec{u}))+g(f(\vec{v}))=(g\circ f)(\vec{u})+(g\circ f)(\vec{v})$.
  (l2) $(g\circ f)(\lambda\vec{u}) = g(f(\lambda\vec{u})) = g(\lambda f(\vec{u})) = \lambda g(f(\vec{u})) = \lambda(g\circ f)(\vec{u})$.

Per tant $(g\circ f)$ és lineal.

- Trobem la matriu de $g \circ f$:
  Per això n'hi ha prou amb calcular les imatges dels vectors de la base de E_m .
  Sigui $\vec{e}_i$ el i-èssim vector de la base de E_m, per definició de matriu tindrem que:

$$\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ . \\ : \\ c_{ni} \end{pmatrix} = g(f(\vec{e}_i)) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{1i}+b_{12}a_{2i}+..+b_{1p}a_{ni} \\ b_{21}a_{1i}+b_{22}a_{2i}+...+b_{2p}a_{ni} \\ \dots \\ \vdots \\ b_{n1}a_{1i}+b_{n2}a_{2i}+...+b_{np}a_{ni} \end{pmatrix}$$

que és fàcil de recordar, si es té en compte que, l'element i j s'obté de la fila i de la primera matriu i de la columna j de la segona matriu:



Exemple:

Donades les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Calculem AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot2 & 1\cdot2 + 2\cdot(-5) & 1\cdot0 + 2\cdot(-3) \\ 3\cdot1 + 4\cdot2 & 3\cdot2 + 4\cdot(-5) & 3\cdot0 + 4\cdot(-3) \\ 5\cdot1 + 6\cdot2 & 5\cdot2 + 6\cdot(-5) & 5\cdot0 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -8 & -6 \\ 11 & -14 & -12 \\ 17 & -20 & -18 \end{pmatrix}$$

Si ara calculem BA

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot3 + 0\cdot5 & 1\cdot2 + 2\cdot4 + 0\cdot6 \\ 2\cdot1+(-5)\cdot3+5(-3) & 2\cdot2+(-5)\cdot4+(-3)\cdot6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -28 & -34 \end{pmatrix}$$

Com $BA \neq AB$, podem afirmar que: **el producte de matrius no és commutatiu** .
És més, sovint ni tant sols podem fer a l'hora el producte de AB i BA, doncs per poder multiplicar dues matrius cal que el número de columnes de la 1ª sigui igual al número de files de la 2ª.

PROPIETATS DEL PRODUCTE DE MATRIUS

Algunes de les propietats que compleix el producte de matrius són:

- **Associativa : A (B C) = (A B) C.**
- **No és commutatiu.**
- **És distributiu respecte de la suma de matrius A (B + C) = A B + A C .**

PRODUCTE DE MATRIUS QUADRADES.

El cas més interessant del producte de matrius, és el de matrius quadrades (mateix número de files que de columnes).
Si anomenem M_{nn} al conjunt de matrius de n files x n columnes es verifica que:

- M_{nn} amb la suma de matriu és un grup abelià ,
- El producte de matrius de M_{nn} és de M_{nn} ,
- El producte és associatiu , A (B C) = (A B) C .
- Hi ha element neutre ,que correspon a identitat $I(\vec{v})=\vec{v}$, que té per matriu:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ & :::::::::::: & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- El producte és distributiu respecte de la suma .
- En general no hi ha element invers. Però quan una matriu A té inversa pel producte, es diu que és una **matriu regular** ; llavors a la inversa de A, la representem per A^{-1} .