Lògica.

Llenguatge natural i llenguatge formal.

El llenguatge natural és el vehicle per excel·lència de la comunicació dels raonaments, sentiments i emocions; ens permet fer frases com:

Entre el diàleg dels pins i la mar
el teu silenci acompanya el paisatge.
Si aquesta trena que el vola a l'atzar
té la color més gentil de la platja,

el gessamí que ara portes al pit
posa perfum en la sala daurada,
i es fa sensible en aquella alenada
la lleu aroma del teu esperit

(Marià Manent
del La collita en la boira)

o com

Consisteix a incloure en el cost i el cost final, per una banda, els costos variables (directes i indirectes) i, per altra banda, els costos fixos, però calculats en funció de la relació entre el volum real de producció i el volum de producció definit com a normal de l'explotació.

D'un llibre d'economia.

Però el llenguatge natural, amb la seva gran capacitat expressiva i la seva riquesa de matisos no és l'eina més adient per a l'estudi dels raonaments.

El llenguatge natural és fa difícil la generalització i manipulació, ens resulta mes fàcil descobrir semblances i similituds entre problemes si els tenim expressats en un llenguatge formal. Per això la lògica, com altres disciplines científiques, recorre a la utilització d'un llenguatge formal, del que ara sols en veurem **tres** (ni tant sols quatre) pinzellades.

Proposicions.

Una proposició és qualsevol frase declarativa o enunciat declaratiu, a qui podem assignar una valor de veritat, pot ser veritat (V) o fals (F) , però no les dues coses alhora.

"Fa calor", "Si plou obrim el paraigües" ,"Avui tenim moltes hores de classe", són exemples de predicats.

Àtoms i connectives.

De les proposicions més simples, que no podem descompondre en altres frases declaratives, en diem **àtoms** i acostumem a representar-los amb lletres majúscules a partir de la P.

Així a la proposició "Si plou obrim el paraigües" li podem distingir els àtoms P="plou" i Q="obrim el paraigues"

Les **connectives** són els operadors que permeten combinar àtoms o combinacions d'àtoms i obtenint així noves proposicions , més complexes a partir d'altres més elementals.
Les connectives que mes ens interessen són :

Negació

La negació, ens transforma una frase en el seu contrari; és a dir:
si tenim una proposició P , anomenem **no P** o **negació de P** i designem com **¬P** a una nova proposició que és vertadera sempre que P és falsa i falsa quan P és vertadera.

Conjunció

Es la connectiva que ens permet formalitzar la simultaneïtat de dues proposicions; així si tenim les proposicions P i Q, anomenem **conjunció de P i de Q ,** ho representem com **P ∧Q** i ho llegim **P i Q** .
La una nova proposició té el valor (V) sempre siguin que P i Q siguin(V) alhora, i és falsa quan alguna de les dues sigui falsa..

Disjunció

Quan tenim dues proposicions P i Q, anomenem **disjunció de P i de Q**, ho representem per **P ∨ Q** i ho llegim com **P o Q** , a una nova proposició que és certa quan alguna d'elles és certa i falsa quan totes són falses.

Compte amb el fet que la disjunció que hem definit, **no és exclusiva** i admet la simultaneïtat. Quan la P i la Q són certes les dues, P ∨ Q és certa.

Si no ho volguéssim així i necessitéssim que la simultaneïtat de (V) de P amb Q, donés (F), parlaríem de la **disjunció exclusiva** de **P** amb **Q** que la formalitzem com $\mathbf{P \veebar Q}$.
Observis que la disjunció exclusiva en el fons és (P o Q) i no (P i Q), és a dir :

$$\mathbf{P \veebar Q = (P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q).}$$

Condicional

La implicació és la connectiva que ens permet formalitzar les condicions, així quan tenim P i Q dues proposicions, diem que **P implica Q** i ho representem com **P→Q** a una nova proposició que es veritat quan si **P** és veritat **Q** també és veritat.

La implicació **P→Q** , també s'acostuma a llegir com: "Si P llavors Q" , o també "P és condició suficient per a Q", o "Q és condició necessària per a P".

A vegades es considera la connectiva **bicondicional** , **P↔Q**, que pren el valor(V) sempre que P i Q tenen el mateix valor de veritat, i la bicondicional és (F) quan P i Q tenen diferents valors, un és (V) i l'altre (F).
Aquesta connectiva és el mateix que P→Q i Q→P.

Formalització

Amb el que tenim fins ara, ens podem ja platejar-nos la formalització dels enunciats buscant els àtoms i les connectives que els uneixen.
No hi ha una recepta universal per poder formalitzar, però en general cal:

Comprendre la frase, desfer les ambigüitats i desprendre's de les floridures per poder decidir qui són els àtoms i quina és la seva prioritat.

Exemples de formalització:

"*Plou* (P) *i fa sol* (S)"	$P \wedge S$
"*La pilota bota* (P) o *plou* (Q) *i fa sol* (R)"	$P \vee (Q \wedge R)$
"*Es necessita pagar l'entrada*(P) *per veure la pel·lícula*(V)"	$V \rightarrow P$
"*Fa olor a roses*(P) *o fa olor a clavells*(Q)"	$P \vee Q$
"*Si plou* (P) *obrim el paraigües*(Q)"	$P \rightarrow Q$
"Si *és parell* (P) *o múltiple de 3* (Q), *no és primer* (R)"	$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$
"*Si plou* (P) *obrim el paraigües*(Q)"	$P \rightarrow Q$
"*Només si plou* (P) *obrim el paraigües* (Q)"	$Q \rightarrow P$

Deducció natural

Un raonament és un procés ens força acceptar una conclusió a partir de l'acceptació d'unes proposicions inicials, validar un raonament és demostrar que de premisses inicials se'n pot afirmar la conclusió.

Recordem les regles de la deducció natural

I∧ Introducció de la conjunció

$$\frac{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}}{P \wedge Q}$$

E∧ Eliminació de la conjunció

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

I∨ Introducció de la disjunció

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

E→ Eliminació de la implicació (Modus ponens)

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q\\ P\end{array}}{Q}$$

I→ Introducció de la implicació

$$\frac{\left|\begin{array}{l}P\\ \hline \dots\\ Q\end{array}\right.}{P \rightarrow Q}$$

I¬ **Introducció de la negació (Reducció a l'absurd)**

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} P \\ \hline \ldots \\ Q \\ \ldots \\ \neg Q \end{array} \\ \hline \neg P \end{array}$$

E¬ **Eliminació de la negació**

$$\begin{array}{l} \neg\neg P \\ \hline P \end{array}$$

E∨ **Eliminació de la disjunció**

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \begin{array}{|l} P \\ \hline \ldots \\ R \end{array} \\ \\ \begin{array}{|l} Q \\ \hline \ldots \\ R \end{array} \\ \hline R \end{array}$$

It **Iteració**

$$\begin{array}{c} P \\ \ldots \\ \hline P \end{array}$$

I les regles derivades

SH **Sil·logisme hipotètic**

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline P \to R \end{array}$$

QS **Quodlibet sequitur**

$$\begin{array}{l} P \\ \neg P \\ \hline Q \end{array}$$

SD **Sil·logisme Disjuntiu**

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array}$$

MT Modus tol·lens

$$\frac{P\rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

Res Resolució

$$\frac{\neg P\vee Q \quad P\vee R}{Q\vee R}$$

Taules de veritat

Les taules de veritat ens permeten saber el valor de veritat (V) o falsedat (F) d'una proposició a partir de la certesa o falsedat dels seus àtoms o proposicions en que ho descomposem. Per això hem de contemplar totes les combinacions de (V) o (F) que es poden donar entre els àtoms i deduir a partir d'aquí, si la proposició és(V) o (F).

Per construir la taula de veritat d'una proposició, ens limitem a escriure tots els àtoms i al final la proposició que volem avaluar; per això hem de contemplar totes les combinacions de veritat o falsedat dels àtoms
Així per exemple la taula de veritat de la negació és

P	**¬P**
v	**F**
f	**V**

La taula de veritat de les conjuncions que hem introduït és:

P	Q	P∧Q	P∨Q	P⊻Q	P→Q	P↔Q
v	v	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
v	f	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
f	v	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**
f	f	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Si descomposem la proposició a avaluar en **n** àtoms el número de casos a contemplar és de $\mathbf{2^n}$.

P	Q	R	Q∨R	P∧(Q∨R)	P∧Q	P∧R	(P∧Q)∨(P∧R)
v	v	v	**v**	**V**	**v**	**v**	**V**
v	v	f	**v**	**V**	**v**	**f**	**V**
v	f	v	**v**	**V**	**f**	**v**	**V**
v	f	f	**f**	**F**	**f**	**f**	**F**
f	v	v	**v**	**F**	**f**	**f**	**F**
f	v	f	**v**	**F**	**f**	**f**	**F**
f	f	v	**v**	**F**	**f**	**f**	**F**
f	f	f	**f**	**F**	**f**	**f**	**F**

Si el resultat final d'una taula de veritat d'una proposició és tot (V) diem que la proposició és una **tautologia** mentre que si aquest valors finals són tots (F) és una **contradicció**.

Exemples de tautologia són els principis aristotèlics:

- Principi d'identitat : $P \to P$

P	**P→P**
v	**V**
f	**V**

- Principi de no contradicció: $\neg(P \wedge \neg P)$

P	¬P	P∧¬P	**¬(P∧¬P)**
v	f	f	**V**
f	v	f	**V**

- Principi del tercer exclòs: $P \vee \neg P$

P	¬P	**P∨¬P**
v	f	**V**
f	v	**V**

Si tenim **P** i **Q** dues proporcions diem que
P implica Q i ho notem com $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ al fet que la proposició $\mathbf{P \to Q}$ sigui una tautologia.

Diem que **P equival a Q** i que ho expressem com $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$ quan $\mathbf{P \leftrightarrow Q}$ és la tautologia.

Àlgebra de les proposicions

Idempotència	$P \wedge P = P$	$P \vee P = P$
Commutabilitat	$P \wedge Q = Q \wedge P$	$P \vee Q = Q \vee P$
Associabilitat	$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
Absorció	$P \wedge (Q \vee P) = P$	$P \vee (Q \wedge P) = P$
Distributiva	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Llei de l'ínfim	$P \wedge (F) = (F)$	$P \vee (F) = P$
Llei del suprem	$P \wedge (V) = P$	$P \vee (V) = (V)$
Llei del complementari	$P \wedge \neg P = (F)$	$P \vee \neg P = (V)$

ALTRES

Lleis de Morgan	$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$
Cancel·lació	$P \wedge R = Q \wedge R$ i $P \vee R = Q \vee R$ $\Rightarrow P = Q$	
Doble negació	$\neg\neg P = P$	

Proposicions obertes

Una proposió oberta o funció preposicional, és una expressió amb alguna variable que pot prendre diferents valors i que al substituir aquesta variable per un valor determinat l'expressió és una proposició i per tant és (V) o (F).
Dels diferents valors que pot prendre la variable, en diem el **domini** .

Les proposicions obertes, acostumem a expressar-les com P(x) on x és la variable que podem substituir pels diferents valors, quan tenim més d'una variable, acostumem a posar P(x,y,z).

Per exemple Si considerem com a domini els nombres enters,
"x és un nombre primer" = P(x) és una funció proposicional.
Per cada valor numèric que donem a x, obtenim una proposició, que té el seu valor de veritat; així P(8) , P(3), P(16) són diferents proposicions que podem deduir de P(x).

Sovint ens interessa transformar les formes proposicionals en proposicions, sense haver de concretar tant les variables, per això utilitzem els anomenats quantificadors universal i existencial.

El quantificador **universal** que fa referència a tos els elements del domini, l'acostumem a escriure amb el símbol $\forall$ que llegim com tot o qualsevol.
Així l'expressió $\forall x, P(x)$ la llegim com "qualsevol x verifica P(x)".

Observeu que el quantificador universal, pot entendres com la conjunció de totes les proposicions que obtenim quan substituïm la variable pels tots els elements del domini.

El quantificador **existencial**, ens indica algun dels elements del domini, sense entrar en precisar ni quins ni quants.
Així l'expressió $\exists x, P(x)$, la llegim com existeix x que verifica P(x).
Fixeu-vos que el valor de veritat de $\exists x, P(x)$, és el mateix que el de la disjunció de totes les proposicions que s'obtenen substituint x pels diferents valors del domini.

La negació dels quantificadors, segueix la forma:
Negació de l'universal
$\neg(\forall x , P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$
Negar que "tothom es bon estudiant" equival a dir que "Hi ha algú que no és bon estudiant"
Negació del existencial
$\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$