PRODUCTE ESCALAR.

DEFINICIO.

Donat E un R-espai vectorial, anomenem producte escalar a qualsevol aplicació

$$\cdot : E \times E \longrightarrow R$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$$

tal que:
- [p1] per tot $\vec{u},\vec{v} \in E$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- [p2] per tot $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in E$ $\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- [p3] per tot $\vec{u},\vec{v} \in E$ i $\lambda \in R$ $\quad \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}$
- [p4] per tot $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{u} > 0$

PROPIETATS:

Per tot $\vec{u} \in E$ $\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$. Ja que: $\vec{0}\cdot\vec{u} = (\vec{0}+\vec{0})\cdot\vec{u} = \vec{0}\cdot\vec{u} + \vec{0}\cdot\vec{u} \Rightarrow \vec{0}\cdot\vec{u} = 0$.

$\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ **.** Es evident per la propietat anterior i per [p4]

Per tot $\vec{u},\vec{v} \in E \Rightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \le (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$.

Donats $\vec{u}$ i $\vec{v} \in E$, considerem $\vec{u} + \lambda\vec{v} \Rightarrow (\vec{u}+\lambda\vec{v})^2 \ge 0$, hi ha dues possibilitats:

- Existeix $\lambda \in R$, de manera que $\vec{u} + \lambda\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = -\lambda\vec{v}$
  $\Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = ((-\lambda\vec{v})\cdot\vec{v})^2 = (-\lambda)^2(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{v}) = ((-\lambda\vec{v})\cdot(-\lambda\vec{v}))(\vec{v}\cdot\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$
  $\Rightarrow$ compleix la desigualtat.
- Per tot $\lambda \in R$ $\vec{u} + \lambda\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow$ per tot λ $(\vec{u}+\lambda\vec{v})^2 \neq 0$.
  $\Leftrightarrow$ l'equació $\lambda\,\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v}\,\lambda + \vec{v}\cdot\vec{v}\,\lambda^2 = 0$ no té solució $\Leftrightarrow$ b^2-4ac és $< 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (2\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{u}) < 0 \Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 < (\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{u})$
  $\Rightarrow$ compleix la desigualtat.

Com a conseqüència d'aquesta demostració, podem afirmar:

$\vec{u},\vec{v}$ són linealment dependents $\Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$.

$\vec{u},\vec{v}$ són linealment independents $\Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 < (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$.

BASES ORTONORMALS.

Si E és un R-espai vectorial i $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ una base de E, diem que:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \text{ una base ortonormal} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

EXPRESSIÓ ANALÍTICA DEL PROD. ESCALAR EN UNA BASE ORTONORMAL.

Suposem que $E = R^3$ i $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ és una base ortonormal

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ dos vectors de E $\Rightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{w} = u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3$.

Ja que:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= (u_1,u_2,u_3)\cdot(w_1,w_2,w_3) = (u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_3\vec{e}_3)\cdot(w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2+w_3\vec{e}_3) = \\ &= u_1w_1\vec{e}_1\vec{e}_1+u_2w_1\vec{e}_2\vec{e}_1+u_3w_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + u_1w_2\vec{e}_1\vec{e}_2+u_2w_2\vec{e}_2\vec{e}_2+u_3w_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + \\ &\quad u_1w_3\vec{e}_1\vec{e}_3+u_2w_3\vec{e}_2\vec{e}_3+u_3w_3\vec{e}_3\vec{e}_3 = \\ &= u_1w_1\,1+u_2w_1\,0+u_3w_1\,0+u_1w_2\,0+u_2w_2\,1+u_3w_2\,0+u_1w_3\,0+u_2w_3\,0+u_3w_3\,1 = \\ &= u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 .\end{aligned}$$

NORMA.

Com $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$, sempre podem parlar de la seva arrel quadrada, és a dir, podem parlar de $\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ que anomenem **norma o mòdul** del vector $\vec{u}$ i ho representem per $|\vec{u}|$.

Si el vector és referit a una base ortonormal, tenim que

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u^2_1+u^2_2+u^2_3}$$

VECTORS PERPENDICULARS.

Donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors diem que: $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **són perpendiculars** $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **= 0 .**

I si els vectors estan referits en una base ortonormal, ho podem expressar com:

$$\vec{u} \text{ i } \vec{v} \text{ perpendiculars} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

ANGLE ENTRE VECTORS.

Donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de R^3, referits a una base ortonormal, definim l'angle entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en la forma:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u^2_1+u^2_2+u^2_3}\ \sqrt{v^2_1+v^2_2+v^2_3}}$$

DISTÀNCIA - L'ESPAI EUCLIDIÀ.

Considerem l'espai afí A i E el seu espai vectorial associat, on hi ha definit un producte escalar.

Definim la distància euclidiana entre A i B com la norma del vector que va de A a B .

És a dir

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB}\ \vec{AB}}$$

Si la base és ortonormal, tenim que la distància euclidiana es pot expressar en la forma:

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Anomenem **sistema cartesià** al sistema de referència afí, que té la base de vectors ortonormals.

NOTA: A partir d'aquest moment, sempre suposarem que l'espai afí que tenim és R^3 i que els vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ són un sistema ortonormal.

PRODUCTE VECTORIAL.

Siguin $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de R^3 , referits a una base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

definim $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3-u_3v_2 , u_3v_1-u_1v_3 , u_1v_2-u_2v_1)$,

que formalment coincideix amb:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

PRINCIPALS PROPIETATS:

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Doncs $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\vec{v} \wedge \vec{u} .$$

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Ja que : $$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

- $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$.

$$(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) .$$

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Ja que: $$\vec{u} \wedge \vec{u} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) = (0,0,0)$$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ és perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.

Ja que $$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right) =$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ són perpendiculars.

- $\left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$

  Doncs:

  $|\vec{u}\wedge\vec{v}|^2 = (\vec{u}\wedge\vec{v})(\vec{u}\wedge\vec{v}) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2 =$$

$$= (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 =$$

$$= (\vec{u}\,\vec{u})(\vec{v}\,\vec{v}) - (\vec{u}\,\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}))^2 =$$

$$= |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2\,(1-\cos^2(\vec{u},\vec{v})) = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 \sin^2(\vec{u},\vec{v}) .$$

PRODUCTE MIXT.

Siguin $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tres vectors de R^3, definim producte mixt de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ com:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\;(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) .$$

Ja que:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \left(\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3 \right) =$$

$$= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & v_1 & w_1 \\ \vec{e}_2 & v_2 & w_2 \\ \vec{e}_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{u}\;(\vec{v}\wedge\vec{w}) .$$

PROPIETATS PRODUCTE MIXT.

Per la representació del producte mixt com a determinant, podem afirmar les següents propietats:

- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]=-[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$.
- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]$ i $[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.
- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ són linealment dependents.

Més endavant, veurem les aplicacions que té el producte mixt, per a calcular àrees i volums d'algunes figures.

PERPENDICULARITAT ENTRE VARIETATS.

RECTES PERPENDICULARS.

Donades les rectes

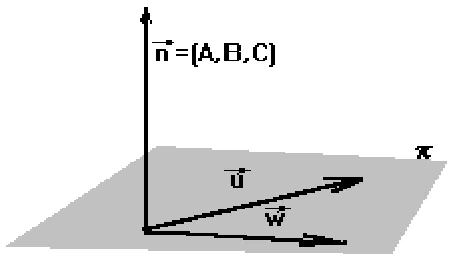
$$r:\ \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3} \quad \text{i}\quad s:\ \frac{x-b_1}{w_1}=\frac{y-b_2}{w_2}=\frac{z-b_3}{w_3}$$

Diem que:

r i s són perpendiculars $\Leftrightarrow$ els seus vectors directors són perpendiculars $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$.

PROPIETAT.

Donat el pla Ax + By + Cz + D = 0 , el vector (A,B,C) sempre és perpendicular a qualsevol vector d'aquest pla.



Per aquesta raó, del vector (A,B,C), en diem vector **normal** al pla.

Ja que:

Si $\vec{u}$ i $\vec{w}$ són les direc. del pla $\Rightarrow$ $A = \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}$ i $C = \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}$.

Fent el producte escalar de $\vec{u}$ amb (A,B,C), tenim

$$\vec{u}\cdot(A,B,C) = u_1\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} = \det(\vec{u},\vec{u},\vec{w})=0, \Rightarrow$$

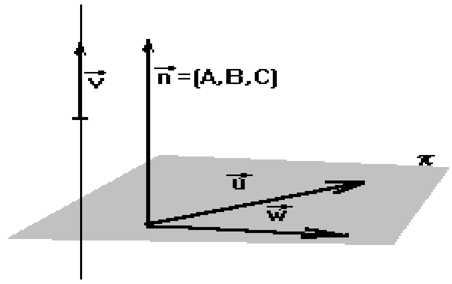
$\Rightarrow$ $\vec{u}$ és perpendicular a (A,B,C).

Anàlogament $\vec{w}$ és perpendicular a (A,B,C).

De fet, el vector (A,B,C) és perpendicular a qualsevol vector del pla. I per aquesta raó, podem trobar l'equació del pla fent (A, B. C) ($x-a_1$, $y-a_2$, $z-a_3$) = 0
També podem definir el pla que passa pel punt A=(a_1,a_2,a_3) i té les direccions de $\vec{u}$ i $\vec{w}$, tenint en compte que (A,B, C) al ser perpendicular a tots els vectors de π, es pot obtenir com a producte vectorial de $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Es a dir π: $\vec{u}\wedge\vec{w}$($x-a_1$, $y-a_2$, $z-a_3$) =0.

RECTA I PLA PERPENDICULARS.

Donats el pla π: $Ax + By + Cz + D = 0$ i la recta



$$r:\ \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

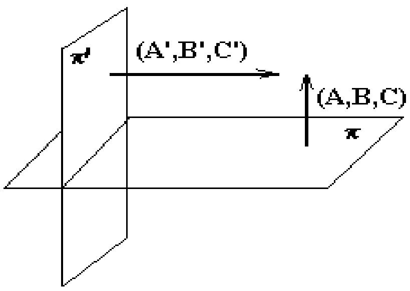
diem que

r i π són perpendiculars $\Leftrightarrow \frac{A}{v_1} = \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ el vec. dir. de r és perpendicular a tots els vectors del pla $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ el director de r és proporcional al vector (A,B,C).

PLANS PERPENDICULARS.

Donats els plans $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ i $\pi': A'x+B'y+C'z+D'=0$,
diem que:



π i π' són perpendiculars $\Leftrightarrow$
els vectors normals a π i π' són perpendiculars
$\Leftrightarrow (A,B,C)\cdot(A',B',C')=0 \Leftrightarrow AA'+BB'+CC' = 0$.

ANGLE ENTRE VARIETATS.

ANGLE ENTRE RECTES.

Donades les rectes

$$r:\ \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \qquad s:\ \frac{x - b_1}{w_1} = \frac{y - b_2}{w_2} = \frac{z - b_3}{w_3}$$

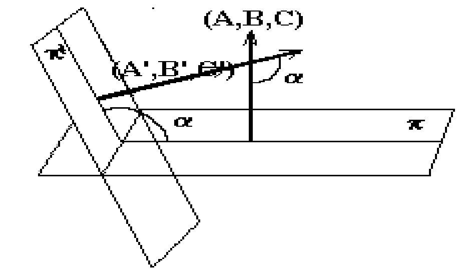
definim l'angle entre r i s , com l'angle que formen els seus vectors directors o el suplementari d'aquest angle (cal que estigui entre 0 i $\pi/2$).

Per tant:

$$\cos(r,s) = \left| \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} \right| = \left| \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\ \sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}} \right|$$

ANGLE ENTRE PLANS.

Donats els plans π:Ax+By+Cz+D=0 i π':A'x+B'y+C'z+D'=0, definim



l'angle format per π i π' com l'angle que formen els seus vectors normals (A,B,C) i (A',B',C').

Així doncs:

$$\cos(\pi,\pi')=\left|\frac{(A,B,C)\,(A',B',C')}{|(A,B,C)|\,|(A',B',C')|}\right|=\left|\frac{A\,A'+B\,B'+C\,C'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\right|$$

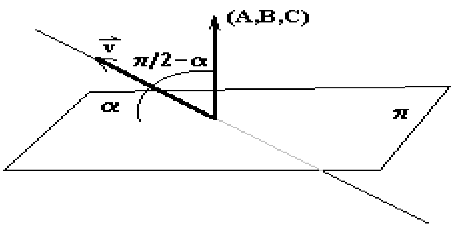
ANGLE ENTRE UNA RECTA I UN PLA.

Donada la recta r i el pla π :

$$r:\ \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}\qquad \pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

definim l'angle entre r i π com el complementari de l'angle entre el vector director de r i el vector normal a π.

Així doncs: $$\sin(r,\pi)=\frac{|(A,B,C)\ \vec{v}\,|}{|(A,B,C)|\,|\,\vec{v}\,|}=\frac{|\,Av_1+Bv_2+Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{v^2_1+v^2_2+v^2_3}}$$



DISTÀNCIA ENTRE VARIETATS.

Quan hem introduït el concepte d'espai euclidià, hem donat la definició de distància entre dos punts, en la forma:
Si $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$ dos punts de l'espai, distància de A a B és la norma del vector de $\vec{AB}$.

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}\ .$$

Quan ens plantegem donar una definició de distància entre dues varietats, ho fem dient que és la mínima de les distàncies que existeixen entre dos punts qualsevols un de cada varietat.
Aquesta definició tant general, ens obliga a treballar constantment amb problemes de màxims i mínims. Per això, ens limitarem a donar els diferents mètodes que permeten calcular les distàncies, d'una forma molt més intuïtiva i geomètrica.

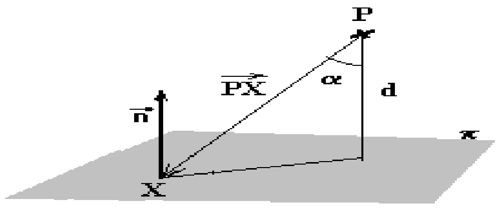
DISTÀNCIA PUNT - PLA.

Donat el punt $P=(p_1,p_2,p_3)$
i el pla $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

Ja que:
Si X és un punt qualsevol de π, tenim que:

$d(P,\pi)= d = |\vec{PX}|\,|\cos\alpha|$ (1)



Si α és l'angle que formen $\vec{PX}$ i $\vec{n} \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{PX}\,\vec{n}}{|\vec{PX}|\,|\vec{n}|}\ .$$

Substituint:

$$d(P,\pi)=|\vec{PX}|\,\frac{\vec{PX}\,\vec{n}}{|\vec{PX}|\,|\vec{n}|} = \frac{(x-p_1\ ,\ y-p_2\ ,\ z-p_3)\ (A,B,C)}{|(A,B,C)|} = \frac{|Ax-Ap_1+By-Bp_2+Cz-Cp_3|}{|(A,B,C)|}$$

Ara bé, com $X= (x,y,z)\in \pi \Rightarrow (x, y, z)$ compleix l'equació de $\pi \Rightarrow$
$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow |Ax-Ap_1+By-Bp_2+Cz-Cp_3| = |Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

També es pot calcular la distància d'un punt P a un pla π, en la forma:

1. Es calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt.
2. Es troba el punt Q intersecció d'aquesta recta amb el pla.
3. La distància de P a π és la mateixa que la de P a Q.

Exemple:

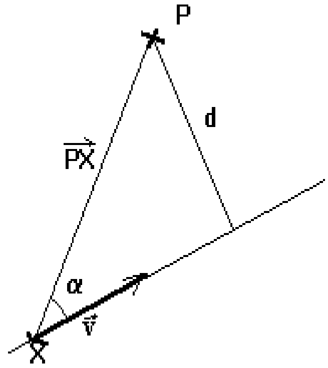
Trobem els plans de la família π_α: x+2y-z=α que disten 5 unitats del punt (1,2,3).

$$d((1,2,3),\pi_\alpha)=\left|\frac{1+2\cdot 2-3-\alpha}{\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{2-\alpha}{\sqrt{6}}\right| = 5 \Rightarrow |2-\alpha| = 5\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 2-\alpha = \pm 5\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} 2-\alpha = 5\sqrt{6} & \Rightarrow \alpha = 2-5\sqrt{6} \\ 2-\alpha = -5\sqrt{6} & \Rightarrow \alpha = 2+5\sqrt{6}\,. \end{cases}$$

DISTÀNCIA PUNT - RECTA.

Si $P=(p_1,p_2,p_3)$ i r: $\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$



$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Ja que:

Si X és un punt qualsevol de la recta,

$$d(P,r) = |\overrightarrow{PX}|\cdot|\sin\alpha| = \left|\overrightarrow{PX} \wedge \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\overrightarrow{PX} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

en particular, per X = A ⇒ $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Exemple:

Trobem la distància del punt (1,1,1) a l'eix de les X.

L'eix de les X és la recta que passa per (0,0,0) i té la direcció del vector $\vec{v}$=(1,0,0).

$$d((0,0,0),\text{eix X}) = \left|(1,1,1) \wedge \frac{(1,0,0)}{|(1,0,0)|}\right| = |(1,1,1)\wedge(1,0,0)| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = |(0,1,-1)| = \sqrt{2}\,.$$

DISTÀNCIA RECTA - RECTA.

Donades les rectes

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \qquad s: \frac{x-b_1}{u_1} = \frac{y-b_2}{u_2} = \frac{z-b_3}{u_3}$$

Es poden donar tres possibilitats:

- **r i s es tallen** $\Rightarrow$ tenen un punt en comú $\Rightarrow$ d(r,s) =0.
- **r i s són paral.leles** $\Rightarrow$ $d(r,s) = d(A,s) = \dfrac{|\vec{AB} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- **r i s s'encreuen** $\Rightarrow$ $d(r,s) = \dfrac{|d(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{u})|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}$.

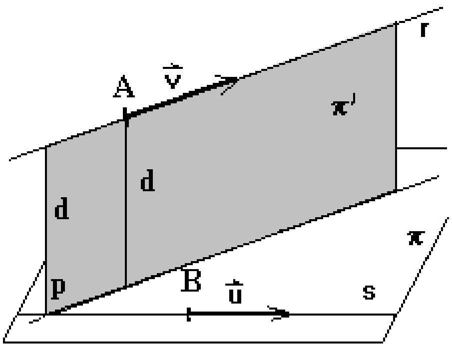
Ja que :

- Si **r i s es tallen** en un punt, és evident que la seva distància és zero.

- Si **r i s són paral·leles** la distància de r a s és la distància d'un punt de r a la recta s

  $$d(r,s) = d(A,s) = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

- Si **r i s s'encreuen** $\Rightarrow$ Siguin π pla paral.lel a r que conté s i π' pla perpendicular a π que conté r .



Si $\pi' \cap s=\{P\} \Rightarrow d(r,s)=d(P,r)$.

r i π són paral·lels i $P\in\pi \Rightarrow$
$d(P,r)=d(r,\pi)$.

I al ser $A\in r \Rightarrow d(r,\pi)= d(A,\pi)$.

Per tant, $d(r,s) = d(A,\pi)$.

$$\text{Com } \begin{cases} s\subset \pi \Rightarrow B\in\pi \text{ i } \pi \text{ té la direcció } \vec{u}. \\ \pi \text{ paral·lel a r} \Rightarrow \pi \text{ té la direcció } \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \pi : (\vec{v} \wedge \vec{u})(X-B)=0 .$$

I per tant :

$$d(A,\pi)=\frac{|(\vec{v} \wedge \vec{u})\cdot(A-B)|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|} = \frac{|\vec{AB}\,(\vec{v} \wedge \vec{u})|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|} = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{u})|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}.$$

Nota: Per trobar la distància entre dues rectes que s'encreuen, també es pot trobar la recta perpendicular comuna que talla a r i s, trobar els punts de talls i la distància entre ells.

Exemple:

Trobem la distància entre r: $x = y = z$ i s: $x-1 = \dfrac{y-1}{2} = z$.

r ens ve determinada pel punt A=(0,0,0) i el vector $\vec{v}$=(1,1,1), mentre s queda determinada pel punt B=(1,1,0) i el vector $\vec{u}$=(1,2,1).

Com $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+1-0-2-1=-1 \;\; 0 \Rightarrow$ r i s s'encreuen.

Trobem $\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,1) \Rightarrow |\vec{v} \wedge \vec{u}| = \sqrt{2}$.

Amb el que: $d(r,s) = \left| \dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \vec{v}, \vec{u})}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|} \right| = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ u .

DISTÀNCIA RECTA - PLA.

Donats

r: $\dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2} = \dfrac{z-a_3}{v_3}$ i π: $Ax + By + Cz + D = 0$,

- Si r i π es tallen $\Rightarrow d(r,\pi)=0$.
- Si r i π són paral.lels $\Rightarrow d(r,\pi) = d(A,\pi) = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Resultats tots dos evidents.

DIVISIÓ D'UN SEGMENT. PUNT MITJA D'UN SEGMENT.

Donat un segment d'extrems $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$, dividir-lo en n parts iguales és determinar n+1 punts ξ_i, de manera que els vectors d'origen ξ_i i extrem ξ_{i+1} siguin tots iguals i $\xi_0=A$ i $\xi_n=B$.

Per tant, $\vec{AB} = \xi_0\xi_1 + \xi_1\xi_2 + ... + \xi_{n-1}\xi_n = n\, \xi_i\xi_{i+1}$, amb el que $\xi_i\xi_{i+1} = \dfrac{\vec{AB}}{n} \Rightarrow$

tindrem que:

$$\xi_0 = A, \quad \xi_1 = A+\frac{1}{n}\vec{AB}, \ldots, \xi_i = A+\frac{i}{n}\vec{AB}, \ldots, \xi_n= A+\frac{n}{n}\vec{AB}=B$$

Per a n=2, s'obté el punt mitjà entre A i B.

$$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (a_1,a_2,a_3) + \frac{(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)}{2}$$

i operant:

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

BARICENTRE D'UN TRIANGLE.

Donat el triangle de vèrtex A, B i C él seu baricentre és:

$$Bar=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right).$$

Justificació:

N'hi ha prou de veure que aquest punt pertany a les medianes, rectes que van d'un vèrtex al punt mitjà del costat oposat.

La mediana M_C ,mediana des del vèrtex C, és la recta que passa per C i pel punt mitjà del costat A i B.

Com que el punt mitjà entre A i B és : $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$

$$M_C : \frac{x - c_1}{\frac{a_1+b_1}{2} - c_1} = \frac{y - c_2}{\frac{a_2+b_2}{2} - c_2} = \frac{z - c_3}{\frac{a_3+b_3}{2} - c_3}$$

i operant: $$M_C : \frac{x - c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{y - c_2}{a_2+b_2 -2c_2} = \frac{z - c_3}{a_3+b_3 -2c_3}$$

Si substituint el punt Bar a l'equació de la recta M_C , tenim que:

$$\frac{\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3} - c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3} - c_2}{a_2+b_2 -2c_2} = \frac{\dfrac{a_3+b_3+c_3}{3} - c_3}{a_3+b_3 -2c_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+b_1+c_1 -3c_1}{a_1+b_1 -2c_1} = \frac{a_2+b_2+c_2 -3c_2}{a_2+b_2 -2c_2} = \frac{a_3+b_3+c_3 -3c_3}{a_3+b_3 -2c_3}$$

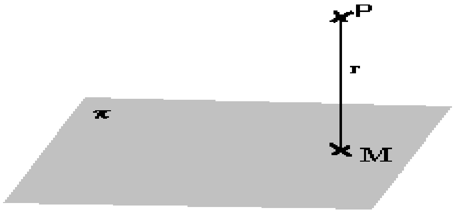
igualtat que és evidentment certa $\Rightarrow$ Bar $\in M_C$.

De manera anàloga podem demostrar que Bar$\in M_A$ i Bar$\in M_B$ $\Rightarrow$ aquest punt és a les tres medianes $\Rightarrow$ és la intersecció de les medianes $\Rightarrow$ és el baricentre de A B C.

PROJECCIONS .

PROJECCIO ORTOGONAL D'UN PUNT SOBRE UN PLA.

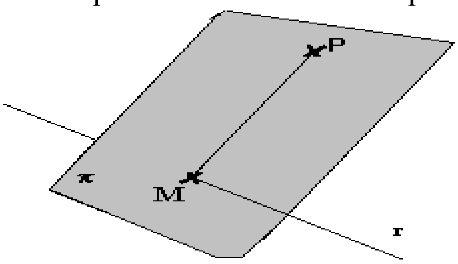
Donat P un punt de l'espai i π un pla, definim la projecció ortogonal de P sobre π, com el punt M de π de manera que la recta PM és perpendicular al pla π.



Per trobar la projecció d'un punt P sobre un pla π, n'hi ha prou a calcular la recta que passa per P, i és perpendicular a π, i intersecar-la amb el pla inicial.

PROJECCIÓ ORTOGONAL D'UN PUNT SOBRE UNA RECTA.

Donat P un punt de l'espai i r una recta, definim la projecció ortogonal de P sobre r com el punt M de r de manera que la recta PM talla perpendicularment r.



Es clar que, per trobar la projecció d'un punt sobre una recta, n'hi ha prou a calcular el pla perpendicular a la recta que passa pel punt P i determinar la intersecció del pla amb la recta r.

SIMETRIES.

SIMETRIA ESPECULAR.

Sigui π un pla de l'espai, definim **simetria respecte de π** a l'aplicació

$$S_\pi: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$
$$X \longrightarrow X'$$

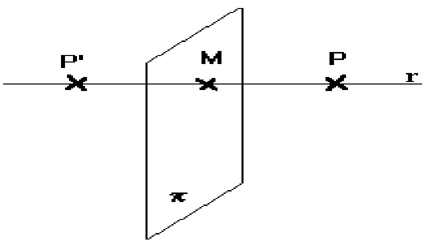
de manera que el punt mitjà entre X i X' és la projecció ortogonal de X sobre π.

Es pot comprovar que S_π és bijectiva i conserva les distàncies.

Per tal de calcular el simètric d'un punt P respecte d'un pla caldrà trobar primer la projecció ortogonal M del punt sobre el pla i a continuació, imposar que M sigui el punt mitjà entre P i P'.

Exemple:

Calculem el simètric del punt P=(-1,-2,-1) respecte del pla π : $x + 2y + 3z = 0$.



Trobaren, en primer lloc, la projecció de P sobre π.

La recta perpendicular a π i que passa per P és:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad r: \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=-2 \end{cases}$$

Si fem la intersecció de r amb π, obtenim el punt M, projecció ortogonal de P sobre π

$$r \cap \pi: \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-z=-2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-3/7 \\ y=-6/7 \\ z=5/7 \end{matrix} \Rightarrow M=(-3/7, -6/7, 5/7).$$

Com M és el punt mitjà entre P i P' ⇒ $M=\left(\frac{-1+p_1}{2}, \frac{-2+p_2}{2}, \frac{-1+p_3}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+p_1}{2} = \dfrac{-3}{7} & \Rightarrow p_1 = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{-2+p_2}{2} = \dfrac{-6}{7} & \Rightarrow p_2 = \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{-1+p_3}{2} = \dfrac{5}{7} & \Rightarrow p_3 = \dfrac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow P'=(1/7, 2/7, 17/7).$$

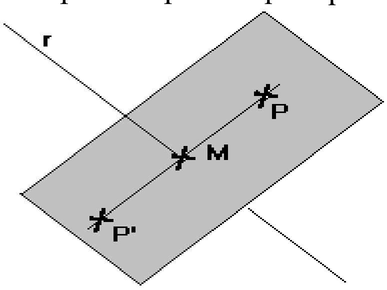
SIMETRIA AXIAL.

Sigui r una recta de l'espai, definim **simetria respecte de r a** l'aplicació

$$S_r: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$
$$X \longrightarrow X'$$

de manera que, el punt mitjà entre X i X' , és la projecció ortogonal de X sobre r.

Es pot comprovar que S_r és una aplicació bijectiva i que conserva les distàncies.



Per calcular el simètric d'un punt P respecte d'una recta, es pot trobar primer la projecció ortogonal M del punt sobre la recta i, a continuació, imposar que M sigui el punt mitjà entre P i P'.

Exemple:

Donada la recta r: x = 2y = 3z, calcularem el simètric del punt P=(1,1,1) respecte d'aquesta recta.

Trobem, en primer lloc, la projecció ortogonal M del punt P sobre la recta r.

El vector director de r és: (1,1/2,1/3), que té la mateixa direcció que el vector (6,3,2), amb la qual cosa el pla perpendicular a r, que passa per P, és π: 6x + 3y + 2z = 11.

Si fem $r \cap \pi$

$$r \cap \pi: \begin{cases} x-2y=0 \\ x-3z=0 \\ 6x+3y+2z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=66/49 \\ y=33/49 \\ z=22/49 \end{matrix} \Rightarrow M=\left(\frac{66}{49}, \frac{33}{49}, \frac{22}{49}\right).$$

Com M és el punt mitjà entre P i P' $\Rightarrow$ $M=\left(\dfrac{1+p_1}{2},\dfrac{1+p_2}{2},\dfrac{1+p_3}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+p_1}{2}=\dfrac{66}{49} & \Rightarrow p_1=\dfrac{83}{49} \\ \dfrac{1+p_2}{2}=\dfrac{33}{49} & \Rightarrow p_2=\dfrac{17}{49} \\ \dfrac{1+p_3}{2}=\dfrac{22}{49} & \Rightarrow p_3=\dfrac{-5}{49} \end{cases} \Rightarrow P'=\left(\dfrac{83}{49},\dfrac{17}{49},\dfrac{-5}{49}\right).$$

Una altra manera de trobar el simètric de P respecte d'una recta r , és la d'expressar la recta com a intersecció de dos plans π i π'; calcular Q simètric de P respecte de π i calcular, després, P' com simètric de Q respecte del pla π'.

SIMETRIA CENTRAL.

Sigui P un punt de l'espai, definim **simetria respecte de P** a l'aplicació

$$\begin{aligned} Sp: A &\longrightarrow A \\ X &\longrightarrow X' \end{aligned}$$

de manera que el punt mitjà entre X i X' és el punt P.

Observem que el simètric de X compleix $\vec{PX} = -\vec{PX'}$.

Es pot comprovar que Sp és una aplicació bijectiva que conserva les distàncies.

Exemple:

Calculem el simètric del punt (1,2,3) respecte del punt (1,1,1).

P=centre de simetria=(1,1,1) $\Rightarrow$ $\vec{PX}=(0,1,2)$

amb la qual cosa

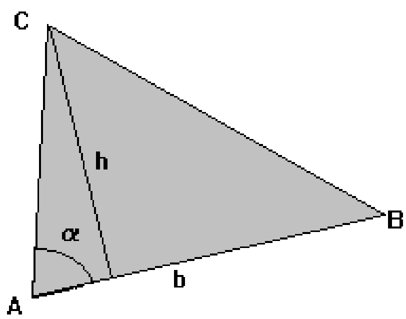
$\vec{PX'}=(0,-1,-2) \Rightarrow X'=(1,1,1)+(0,-1,-2)=(1,0,-1)$.

ÀREES I VOLUMS.

ÀREA D'UN TRIANGLE.

Donats A, B i C, tres punts de l'espai no alineats $\Rightarrow$ A B i C defineixen el triangle ABC, que té per àrea:

$$\text{àrea triang } ABC = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|\,.$$



Ja que:

l'àrea d'un triangle és Àrea $= \dfrac{1}{2}$ base x altura $= \dfrac{b \cdot h}{2}$.

Prenent com a base el costat AB, l'altura és la distància de C al costat AB $\Rightarrow$
$b=|\vec{AB}|$ i $h=|\vec{AC}|\,|\sin\alpha| \Rightarrow$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|\,|\sin\alpha| = \frac{1}{2}|\vec{AB}\wedge\vec{AC}| .$$

ÀREA D'UN PARAL·LELOGRAM.

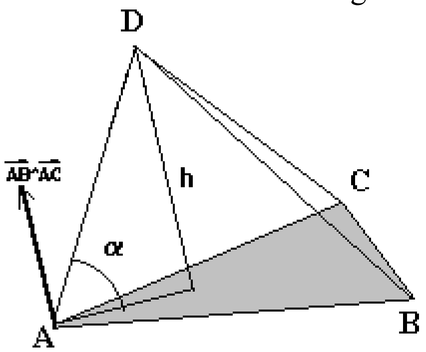
Raonant igual que a l'apartat anterior, si ABCD formen un paral·lelogram, la seva àrea és: Area $= |\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$.

VOLUM D'UN TETRÀEDRE.

Si $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$, $D=(d_1,d_2,d_3)$ són quatre punts de l'espai no coplanaris, tenim que A, B, C i D defineixen el tetràedre ABCD, que té de volum:

$$\text{volum tetràedre ABCD} = \frac{1}{6}\,|\det(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})| .$$

Doncs el volum d'una piràmide és 1/3 superfície base per altura.
Prenent com a base el triangle ABC $\Rightarrow$ altura h= distància de D a la base.



$$\text{Àrea base} = \frac{|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|}{2}$$

altura = h = $|\vec{AD}|\,|\sin\alpha|$.

Si α és l'angle que formen el pla ABC i el costat AD $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\alpha = \cos(\pi/2-\alpha) = \cos(\vec{AD},\vec{AB}\wedge\vec{AC}) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ alt$=|\vec{AD}|\,|\cos(\vec{AD},\vec{AB}\wedge\vec{AC})|$.

$$\text{Vol} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|\,|\vec{AD}|\,|\cos(\vec{AD},\vec{AB}\wedge\vec{AC})| = \frac{1}{6}|(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\vec{AD}| =$$
$$= \frac{1}{6}\,|\det(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})| .$$

Exemple:

Siguin A=(-1, 2, 2) , B=(2, 1 , 0) , C=(8, -3, -2) i D un punt en la forma D=(3+λ, λ, λ).
Trobeu els valors de λ pels quals el tetràedre de vèrtex A, B, C i D té un volum de $5u^3$.

Per la propietat anterior volum tetràedre ABCD $=1/6\,|\det(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})| \Rightarrow$

$$5 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 9 & \lambda + 4 \\ -1 & -5 & \lambda - 2 \\ -2 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left| -18\,\lambda \right| = |3\lambda| \Rightarrow \lambda = \pm\, 5/3\ .$$

VOLUM D'UN PARAL·LELEPÍPEDE.

Anàlogament el volum d'un paral·lelepípede d'arestes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és:

Vol = $\left| \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$.