L'ESPAI AFÍ.

Siguin E un R-espai vectorial i A $\neq \varnothing$ un conjunt.

Diem que **A** és un espai afí associat a l'espai vectorial E $\Leftrightarrow$
podem definir una aplicació

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow E$$
$$(A,B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$$

que compleix les següents propietats:

[a1] per tot A, B ,C $\in$ **A** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

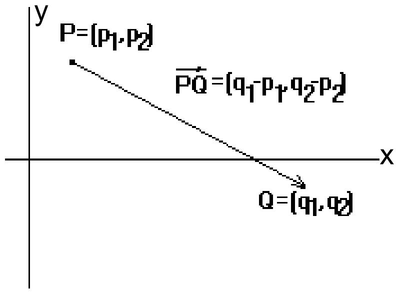
[a2] fixat un p qualsevol de A, l'aplicació $\mathbf{A} \longrightarrow E$ és bijectiva .
$X \longrightarrow \overrightarrow{PX}$

Dels elements de **A**, en diem punts, i de $\overrightarrow{AB}$, en diem vector d'origen A i extrem B.
Hom anomena dimensió de **A**, a la dimensió de l'espai vectorial associat E.

EL PLA AFÍ R^2.

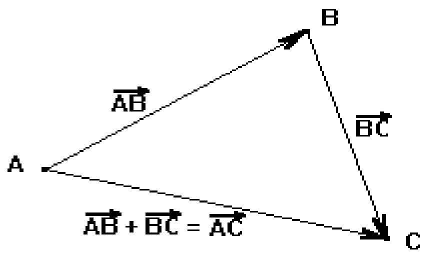
Prenent **A**="punts del pla"=R^2 i E=R^2, obtenim el pla afí, ja estudiat el curs anterior:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow E$$
$(P,Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ}$ ="vector d'origen P i extrem Q"



Es compleixen les dues condicions per ser un espai afí:

[a1] Siguin A=(a_1,a_2) , B=(b_1,b_2) i C=(c_1,c_2);
els vectors que els uneixen són
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$, $\overrightarrow{BC}=(c_1-b_1,c_2-b_2)$ i $\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2)$, amb el que:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b_1-a_1,b_2-a_2) + (c_1-b_1,c_2-b_2) = (c_1-a_1,c_2-a_2) = \overrightarrow{AC}$.



[a2] Fixat P=(p_1,p_2), és relativament senzill el comprovar que l'aplicació

$$\mathbf{A} \longrightarrow E \quad \text{és bijectiva.}$$
$$X=(x_1,x_2) \longrightarrow (x_1-p_1,x_2-p_2) = \overrightarrow{PX}$$

L'ESPAI AFÍ R^3.

Prenem $\mathbf{A}$=R^3 ="punts de l'espai ordinari", i E=R^3=espai vectorial de dimensió 3, definim:

$$R^3 \times R^3 \longrightarrow R^3$$
$$(A, B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3), \text{ on } A=(a_1,a_2,a_3) \text{ i } B=(b_1,b_2,b_3).$$

Es compleix les dues condicions per ésser espai afí:

[a1] Donats $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ i $C=(c_1,c_2,c_3)$,
els vectors que ens defineixen són
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, $\overrightarrow{BC}=(c_1-b_1,c_2-b_2,c_3-b_3)$ i $\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$;
amb el que:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = (b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)+(c_1-b_1,c_2-b_2,c_3-b_3)= (c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3) = \overrightarrow{AC}$.

[a2] Fixat $P=(p_1,p_2,p_3)$, l'aplicació: $\mathbf{A} \longrightarrow E$ és **bijectiva**,
$X=(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow \overrightarrow{PX}=(x_1-p_1,x_2-p_2,x_3-p_3)$
ja que:

- **és injectiva:**
  Si x i y tenen la mateixa imatge $\Rightarrow$
  $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY} \Rightarrow (x_1-p_1,x_2-p_2,x_3-p_3)=(y_1-p_1,y_2-p_2,y_3-p_3)$ amb el que
  $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - p_1 = y_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 = y_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 = y_3 - p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

- **és exhaustiva:**
  Donat un vector $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$, sempre podem posar $\vec{v} = \overrightarrow{PX}$ on x és el punt $x=(p_1+v_1,p_2+v_2,p_3+v_3)$.
  Per tant, aquesta aplicació és bijectiva.

L'ESPAI AFÍ R^n.

En general si $\mathbf{A} = R^n$ i $E = R^n$ amb l'aplicació $R^n \times R^n \longrightarrow R^n$
$((x_1,..,x_n),(y_1,..,y_n)) \longrightarrow (y_1-x_1,..,y_n-x_n)$
és un espai afí.

CONSEQÜÈNCIES DE LA DEFINICIÓ.

Si $\mathbf{A}$ és un E espai afí, sempre es compleix que:

Per tot $A \in \mathbf{A}$ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
És a dir: **El vector d'origen i extrems iguals és zero .**
Ja que: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Per tot $A,B \in \mathbf{A}$, $\overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{BA}$.
Ja que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ són oposats.

Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$.

Ja que: Fixat un punt A i tenim que l'aplicació $\mathbf{A} \longrightarrow E$ és bijectiva.
$X \longrightarrow \overrightarrow{AX}$

Com $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ i $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \Rightarrow$ A i B tenen la mateixa imatge $\Rightarrow A = B$.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (Llei del paral·lelogram) .

Ja que: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.

SISTEMES DE REFERÈNCIA I COORDENADES D'UN PUNT.

Sigui $\mathbf{A}$ un E espai afí, anomenem **sistema de referència afí** al conjunt $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, format per un punt de l'espai afí $O \in \mathbf{A}$, que rep el nom d'origen de l'espai, i per $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ base de l'espai vectorial E.

COORDENADES D'UN PUNT EN UN SISTEMA DE REFERÈNCIA.

Sigui A un E espai afí i $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ un sistema de referència, llavors, per tot punt $P \in \mathbf{A}$, P ens defineix un únic vector d'origen O i extrem P, el $\overrightarrow{OP}$.
Aquest vector té una única representació com a combinació lineal dels elements de la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, el $\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, .., p_n)$.

I del revés, donada una n-pla $(p_1, p_2, .., p_n)$ ens defineix un únic vector $\vec{v}$ que té aquestes components, i aquest vector ens determina un únic punt $p \in \mathbf{A}$**,** de manera que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$.

Així doncs, fixat el sistema de referència $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ podem identificar cada punt P de l'espai amb una n-pla, en la forma

$P = (p_1, p_2, .., p_n)$ on $(p_1, p_2, .. p_n) = \overrightarrow{OP}$

i diem que $(p_1, p_2, . ., p_n)$ són les coordenades de p en aquest sistema de referència.

Observeu que les coordenades d'un punt depenen del sistema de referència escollit, i que per tant sempre ens cal tenir clar en quin sistema de referència treballem.

CÀLCUL DE LES COMPONENTS DEL VECTOR $\overrightarrow{AB}$.

Si $\mathbf{A}$ és un E espai afí i $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ és un sistema de referència afí, per calcular els components d'un vector $\overrightarrow{AB}$, n'hi ha prou en conèixer les coordenades dels punts
$A = (a_1, a_2, .., a_n)$ i $B = (b_1, b_2, .., b_n)$ i restar-les en la forma $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, .., b_n - a_n)$.
Ja que:
Com som a un espai afí, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, i per definició de components
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, .., a_n) - (b_1, b_2, .., b_n) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, .., b_n - a_n)$.

TRANSLACIÓ DE VECTOR $\vec{v}$.

Fixat $\vec{v} \in E$, l'aplicació τ_v:$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ és bijectiva i se'n diu **translació de vector $\vec{v}$**.

$$P \longrightarrow Q \quad \text{on } \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

Ja que:
Fixat $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n\}$ un sistema de referència, τ_v és bijectiva.

injectiva

Si X i Y tenen la mateixa imatge $\tau_v(X) = Q = \tau_v(Y) \Rightarrow \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{YQ} \Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PP}$ com $\overrightarrow{PP} = \vec{0} \Rightarrow X = Y$.

exhaustiva

Donat $Q \in \mathbf{A} \Rightarrow Q = (q_1,q_2,..,q_n)$
si $\vec{v} = (v_1,v_2,..,v_n)$, llavors Q és imatge del punt $(q_1-v_1,q_2-v_2,..,q_n-v_n)$.

Sovint expressem les translacions en la forma $\tau_v(P) = p + \vec{v}$, ja que les coordenades de $\tau_v(p)$ són les coordenades de P més les components de $\vec{v}$.

VARIETATS LINEALS.

Siguin $\mathbf{A}$ un E espai afí, $A \in \mathbf{A}$ un punt i $F \subset E$ un subespai vectorial de E; hom anomena varietat lineal que passa pel punt A i té la direcció de F, al conjunt

$$\mathbf{V} = \{ X \in \mathbf{A} \mid X = A + \vec{v} \text{ amb } \vec{v} \in F \}.$$

que s'acostuma a representar en la forma $\mathbf{V} = A + F$.
Per dimensió de la varietat, entendrem la dimensió de F.
Es pot comprovar que:
Si $\mathbf{V}$ és una varietat lineal $\Rightarrow \{\overrightarrow{PQ} / P,Q \in \mathbf{V}\}$ és subespai vectorial de E, que coincideix amb la direcció de V.

EQUACIONS VECTORIALS I PARAMÈTRIQUES D'UNA VARIETAT.

Sigui $\mathbf{A}$ un E espai afí, $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n\}$ un sistema de referència dim A = n.
Si $\mathbf{V}$ és una varietat lineal que passa per A i té per direcció el subespai vectorial F $\Rightarrow$

$$\mathbf{V} = A + F = \{ X / X = A + \vec{w} \text{ amb } \vec{w} \in F \}$$

però si $\vec{v}_1, \vec{v}_2,.., \vec{v}_r$ és una base de F, tot vector $\vec{w} \in F$ es pot expressar en la forma:
$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + .. + \lambda_r \vec{v}_r$, amb el que:

$$\mathbf{V} = \{X = A + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + .. + \lambda_r \vec{v}_r / \lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_r \in R\}$$

és a dir, $\mathbf{V}$ és formada pels punts X de $\mathbf{A}$ que es poden expressar com :

$$X = A + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + .. + \lambda_r \vec{v}_r / \lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_r \in R$$

D'aquesta manera d'expressar la varietat, se'n diu l'**equació vectorial** de la varietat.

Escrita en forma de components, l'equació vectorial és:

$(x_1,..,x_n) = (a_1,..,a_n) + \lambda_1(v_1^1,..,v_1^n)+..+\lambda_r(v_r^1,..,v_r^n)$, amb $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_r \in R$.

Si ho expressem coordenada a coordenada, la varietat és formada per tots els punts $(x_1,x_2,..,x_n)$, que compleixen simultàniament les n equacions següents:

$$\mathbf{V}: \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + .. + \lambda_r v_r^1 \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + .. + \lambda_r v_r^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_n + \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + .. + \lambda_r v_r^n \end{cases} \qquad \lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_r \in R$$

i que coneixem com a **equacions paramètriques** de $\mathbf{V}$.

Exemple.
Recordem del curs passat, que una recta del pla és definida, per un punt $A=(a_1,a_2)$ i un vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$.
La seva equació vectorial és: $r: (x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(v_1,v_2) \quad \lambda \in R$

La seva equació paramètrica és: $r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}$ amb $\lambda \in R$.

I un punt (x_0,y_0) és de r $\Leftrightarrow$ existeix una λ de manera que substituint (x_0,y_0) i λ, es verifiquen les equacions.

POSSIBLES VARIETATS LINEALS DE R^3.

A partir d'ara, sempre suposarem que som a l'espai afí $R^{3;}$ que hi tenim fixat un sistema de referència afí i que designarem els punts amb les coordenades (x,y,z).

En primer lloc, estudiarem quines són les possibles varietats lineals que podem trobar a R^3. Caldrà fer-ho a partir de la dimensió del subespai director.

Si $A=(a_1,a_2,a_3)$ és un punt que pertany a la varietat $\mathbf{V}$ i F el subespai director de $\mathbf{V}$.

Si Dim F=0. F de dimensió 0 $\Rightarrow$ F={(0,0,0)}.
Per tant, la varietat és $\mathbf{V}: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + (0,0,0) = (a_1,a_2,a_3) = \{punt\}$.

Si Dim F=1. F de dimensió 1$\Rightarrow$ una base de F és formada per un únic vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\neq(0,0,0)$.
Per tant la varietat és $\mathbf{V}: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3)$ amb $\lambda\in R$.
D'aquestes varietats, on la dimensió del subespai director és 1, se'n diuen rectes.

Si Dim F=2. F de dimensió 2 $\Rightarrow$ una base de F és formada per $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, vectors linealment independents.
La varietat és: $\mathbf{V}: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3) + \mu(w_1,w_2,w_3) \quad \lambda,\mu\in R$.
De les varietats amb espai director de dimensió 2, se'n diuen plans.

Dim F=3. Si F és de dimensió 3, llavors $F=R^3$, amb el que una varietat de dimensió 3, tot l'espai R^3.

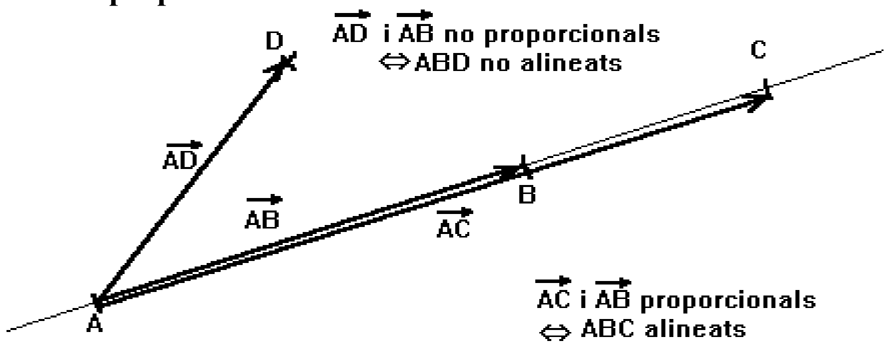
RECTA.

Anomenem recta a tota varietat lineal de dimensió 1. Amb tot, podem donar el concepte de recta d'una forma més intuïtiva, que utilitza la idea de punts alineats.

PUNTS ALINEATS.

Donats tres punts A, B, C, diem que

A,B i C són alineats ⇔ els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ són linealment dependents ⇔
⇔ $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ són proporcionals.

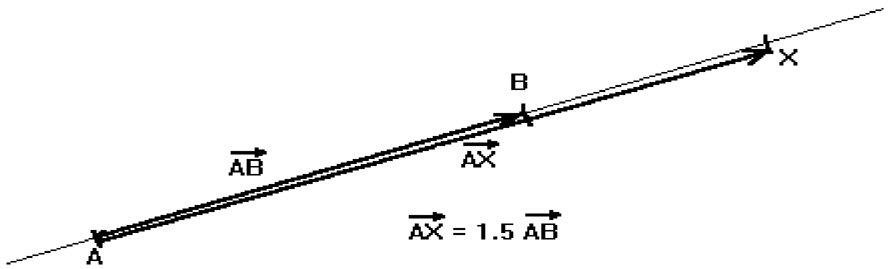


EQUACIONS VECTORIAL I PARAMÈTRICA.

Donats A i B són dos punts diferents, la recta per A i B és formada pels punts X de manera que $\overrightarrow{AX}$ i $\overrightarrow{AB}$ són alineats i, per tant, $\overrightarrow{AX} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

És a dir:

Si $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$ $A\neq B$, la recta per A i B és formada pels (x,y,z) que compleixen: $(x-a_1,y-a_2,z-a_3) = \lambda(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$



és a dir r_{AB} : $(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ $\lambda \in R$.

Del vector $\overrightarrow{AB}$ se'n diu **vector director** de la recta, i no pot ésser nul.

Una altra forma de definir la recta és:

Si $A=(a_1,a_2,a_3)$ és un punt de R^3 i $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \neq 0$, la recta que passa per A i té la direcció de $\vec{v}$, és:

$$r:\ (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3) \qquad \lambda\in R$$

que coneixem amb el nom **d'equació vectorial** r.

Per decidir si un punt (x_0, y_0, z_0) és de la recta, n'hi ha prou en comprovar si existeix una λ_0 , de manera que $(x_0, y_0, z_0) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda_0(v_1,v_2,v_3)$

Observeu que del vector $\vec{v}$, sols ens interessa la seva direcció, i que el podem substituir per qualsevol altre vector del subespai generat per $\vec{v}$; o el que és el mateix, per qualsevol vector proporcional a $\vec{v}$.

Si ho expressem component a component, obtenim l'**equació paramètrica**:

$$r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda\, v_1 \\ y = a_2 + \lambda\, v_2 \\ z = a_3 + \lambda\, v_3 \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad (1)$$

Un punt $(x_0, y_0, z_0) \in r \Leftrightarrow \quad \exists\lambda_0$ de manera que $\begin{cases} x_0 = a_1 + \lambda_0\, v_1 \\ y_0 = a_2 + \lambda_0\, v_2 \\ z_0 = a_3 + \lambda_0\, v_3 \end{cases}$

Exemple:
Considerem la recta r, que passa pel punt (1,-3, 2) i té la direcció del vector $\vec{v}$=(0, 2,5).
La seva equació vectorial és $r : (x,y,z) = (1, -3, 2) + \lambda\,(0, 2, 5)$ amb $\lambda \in R$.

Expressada en l'equació paramètrica és $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases}$.

Mirem si el punt (1, 2, 3) és de r. $\begin{cases} 1 = 1 & \Rightarrow \lambda \text{ pot ser qualsevol} \\ 2 = -3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 5/2 \\ 3 = 2 + 5\lambda & \Rightarrow \lambda = 1/5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ no hi ha cap λ que verifiqui les tres igualtats simultàniament $\Rightarrow (1, 2, 3) \notin r$.

EQUACIÓ CONTÍNUA.

Si isolem la λ de cada una de les equacions del sistema (1), obtenim:

$$\lambda = \frac{x - a_1}{v_1}\ , \quad \lambda = \frac{y - a_2}{v_2}\ , \quad \lambda = \frac{z - a_3}{v_3}$$

i com que les λ son iguals, obtenim l'**equació contínua** de r:

$$r: \ \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} = \lambda$$

Un punt $(x_0, y_0, z_0) \in r \ \Leftrightarrow \ \dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$.

Si l'expressem a partir de dos punts A ≠ B, la recta és:

$$r_{AB}: \ \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = \lambda$$

Exemples:
L'equació contínua de la recta que passa per (1, 2, 3) i (2, -4, 1) és

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 3}{2}$$

L'equació contínua de la recta que passa per (1,-3, 2) i té la direcció de $\vec{v}$=(0, 2,5)

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{5}$$

on apareix un denominador nul; i en aquest cas sobreentenem que el seu numerador també és nul.

EQUACIÓ REDUÏDA.

Donada la recta $r: \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$

la podem considerar com el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{z-a_3}{v_3} \\ \\ \dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3} \end{cases} \text{, que si } v_3 \neq 0 \text{, equival a } \begin{cases} x=\dfrac{v_1}{v_3}z+a_1-\dfrac{v_1\, a_3}{v_3} \\ \\ y=\dfrac{v_2}{v_3}z+a_2-\dfrac{v_2\, a_3}{v_3} \end{cases}$$

sistema que té l'estructura

$$r: \begin{cases} x = m\,z+p \\ y = n\,z+q \end{cases}$$ i coneixem per **equació reduïda de r**.

Observació: a partir de l'equació reduïda d'una recta, en podem calcular la contínua o la vectorial tenint en compte que :

- Podem prendre com a vector director el (m,n,1), ja que $(m,n,1)=\dfrac{1}{v_3}(v_1,v_2,v_3)$.
- Donant a la z un valor arbitrari, podem trobar un punt de la recta. Per exemple ,si fem z=0, el punt $(p,q,0) \in r$.

En aquest cas, l'equació contínua de r, pot ser :

$$r: \frac{x-p}{m}=\frac{y-q}{n}=z\ .$$

De manera anàloga, quan $v_2 \neq 0 \Rightarrow r: \begin{cases} x = m'\,y+p' \\ z = n'\,y+q' \end{cases}$ podent fer $\vec{v} \cong (m',1,n')$.

I quan , $v_1 \neq 0 \Rightarrow r: \begin{cases} y = m''\,x+p'' \\ z = n''\,x+q'' \end{cases}$ on $\vec{v} \cong (1,m'',n'')$.

Exemple:
L'equació contínua de la recta que passa per (1,-3, 2) i té la direcció de $\vec{v}$=(0, 2,5), ens planteja el problema d'un denominador nul , i hem dit de solucionar-ho sobreentenent que el seu numerador també és nul. Ara bé, la millor solució és trobar la seva equació reduïda.
Trobem, en primer lloc, l'equació paramètrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases} .$$

Isolant λ de la segona i tercera equació i igualant tenim que:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{5} \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ 5y + 15 = 2z - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

i per tant

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2/5z - 19/5 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 5/2y + 19/2 \end{cases}$$

EL PLA.

Anomenem pla a tota varietat lineal de dimensió 2.

EQUACIÓ VECTORIAL I PARAMÈTRICA.

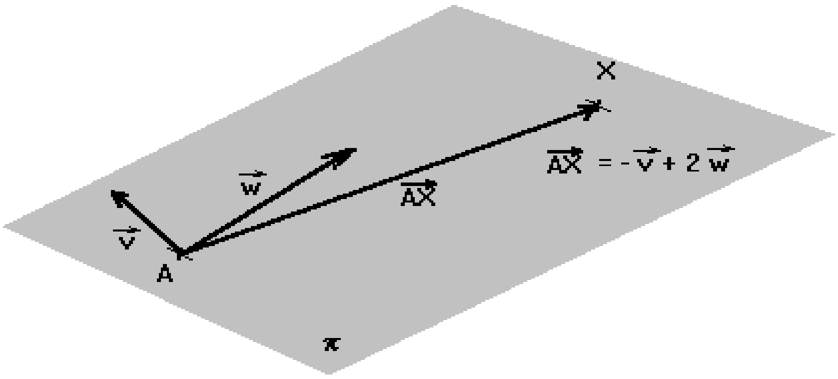
Siguin $A=(a_1,a_2,a_3)$ un punt de R^3, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ dos vectors linealment independents; definim el pla π que passa pel punt A i té les direccions de $\vec{v}$ i $\vec{w}$, com el conjunt de punts (x,y,z) que es poden expressar en la forma:

$$\pi : X = A + \lambda\,\vec{v} + \mu\,\vec{w} \quad , \text{ amb } \lambda, \mu \in R \ ,$$

és a dir :

$$\pi : (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3) + \mu(w_1,w_2,w_3) \quad (1) .$$

Fet que equival a: **el vector $\overrightarrow{AX}$ és combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$.**



Si expressem l'equació (1) component a component, obtenim l'**equació paramètrica** de π

$$\pi: \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Un punt $(x_0,y_0,z_0) \in \pi \Leftrightarrow$

$\exists\ \lambda_0$ i μ_0 de manera que $(x_0,y_0,z_0) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda_0(v_1,v_2,v_3) + \mu_0(w_1,w_2,w_3)$

o bé:

$$(x_0,y_0,z_0) \in \pi \Leftrightarrow \exists\ \lambda_0 \text{ i } \mu_0 \text{ de manera que } \begin{cases} x_0 = a_1 + \lambda_0 v_1 + \mu_0 w_1 \\ y_0 = a_2 + \lambda_0 v_2 + \mu_0 w_2 \\ z_0 = a_3 + \lambda_0 v_3 + \mu_0 w_3 \end{cases}$$

Exemple:

Ens qüestionem si el punt (0,5,1) pertany al pla que passa per (1,1,1) i té les direccions de (-1,2,0) i (0,-2,0).

El pla és π: $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-1,2,0) + \mu(0,-2,0)$.

Com per $\lambda = 1$ i $\mu = -1$ el punt (0,5,1), compleix l'equació de π, tenim que $(0,5,1)\in\pi$.

EQUACIÓ GENERAL DEL PLA.

Considerem el pla π, que passa pel punt (a_1,a_2,a_3) i té les direccions de $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$; llavors, $(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow$ existeixen λ i μ solucions del sistema:

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y - a_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z - a_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

per ser $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents el rang A=2, i, per tant, el sistema té solució

$$\Leftrightarrow \text{rang Am}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Operant

$$\begin{vmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

i finalment:

$$x \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

que un cop operada, pren la forma:

$Ax + By + Cz + D = 0$ i coneixem amb el nom d' **equació general del pla**.

És clar que: un punt $(x_0,y_0,z_0) \in \pi \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Exemple:

Calculem l'equació del pla que passa per (1,1,1) i té les direccions de (2,2,2) i (1,5,3)

Serà

$$\pi: \begin{vmatrix} x - 1 & 2 & 1 \\ y - 1 & 2 & 5 \\ z - 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculant el determinant i simplificant el resultat, obtenim: π: $x + y - 2z = 0$.

PUNTS COPLANARIS.

Donats quatre punts de l'espai A, B, C i D, diem que **són coplanaris** $\Leftrightarrow$ existeix un pla π que conté els quatre punts.

$A= (a_1,a_2,a_3)$, $B= (b_1,b_2,b_3)$, $C= (c_1,c_2,c_3)$, $D= (d_1,d_2,d_3)$ són coplanaris $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{d_1} & \mathbf{d_2} & \mathbf{d_3} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$$

Ja que:

A, **B**, **C**, **D** coplanaris $\Leftrightarrow$ existeix un pla π : $Ax + By + Cz + D = 0$, de manera que **A**$\in\pi$, **B**$\in\pi$, **C**$\in\pi$ i **D**$\in\pi$ $\Leftrightarrow \exists$ A, B, C i D no tots nuls i solució del sistema:

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 + D = 0 \\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 + D = 0 \\ Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 + D = 0 \end{cases}$$

Per ser un sistema homogeni , tindrem que:

admet solució diferent de la trivial ⇔ és de rang 3 ⇔ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

EQUACIÓ D'UN PLA CONEGUTS TRES PUNTS.

Donats tres punts $A= (a_1,a_2,a_3)$, $B= (b_1,b_2,b_3)$ i $C= (c_1,c_2,c_3)$ no alineats (és a dir de manera que els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ siguin linealment independents), sempre existeix un únic pla que els conté, i la seva equació és:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ja que:

Per la propietat anterior, els punts $X= (x,y,z)$, que són coplanaris amb A, B, C, són precisament els que compleixen aquesta condició.

Es pot fer una interpretació més geomètrica raonant en la forma:

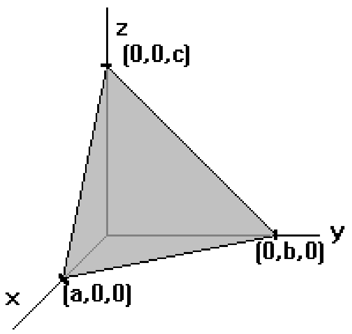
El pla buscat passarà pel punt A i tindrà per direccions la que va del punt A al punt B $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ i la que va de A al punt C $\vec{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$; és a dir el pla per A, B i C és el:

$$\pi: \det(x-a, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ z-a_3 & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

EQUACIÓ SEGMENTARIA DEL PLA.

Si un pla talla els eixos de coordenades en tres punts diferents (a,0,0), (0,b,0) i (0,0,c); la seva equació és:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 ,$$



i es coneix com a
equació segmentària del pla.

Ja que:

Si passa per (a,0,0), (0,b,0) i (0,0,c), la seva equació és:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow bc\, x + ac\, y + ab\, z - abc = 0.$$

Per ser els tres punts diferents, el producte $abc\neq 0$, per tant dividint l'equació per abc, obtenim

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} -1 = 0 .$$

POSICIONS RELATIVES ENTRE VARIETATS.

Donades dues varietats lineals de R^3, ens plantejarem ara quina posició tenen l'una respecte de l'altra. D'entrada ens caldrà saber si tenen punts en comú o no, i per això, estudiarem el sistema format per les equacions de les varietats i raonarem sobre les seves possibles solucions.

PLA - PLA.

Siguin π: Ax+By+Cz+D=0 i π': A'x+B'y+C'z+D'=0 dos plans de l'espai R^3 .
Estudiem la seva intersecció, que seran les solucions del sistema:

$$\pi \cap \pi': \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax+By+Cz=-D \\ A'x+B'y+C'z = -D' \end{cases}$$

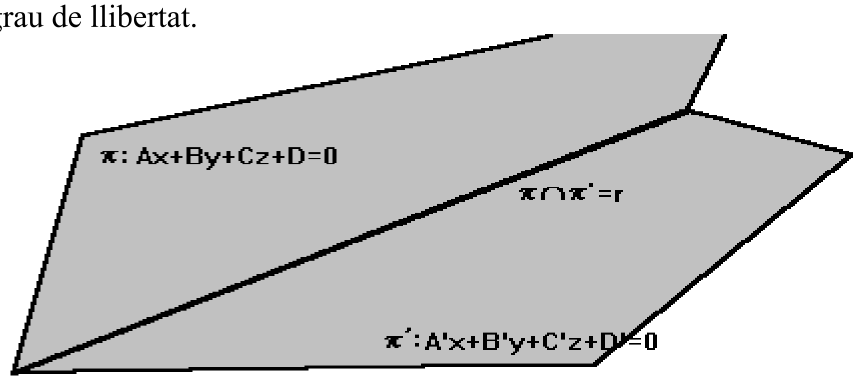
Per decidir les possibles solucions, ens cal raonar sobre els rangs de les matrius

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad \text{i } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right).$$

Es poden produir les següents possibilitats:

- **rang M = 2.**

  Condició equivalent a: **(A, B, C) i (A',B',C') no són proporcionals.**
  Si rang M = 2 $\Rightarrow$ rang M ' = 2 $\Rightarrow$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.



  Si resolem el sistema, obtenim l'equació reduïda d'una recta; per això diem que, els dos plans es **tallen en una recta**.

- **rang M = 1 i rang M' = 2.**

  Condició equivalent a: $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A'}} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{B'}} = \dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{C'}} \neq \dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{D'}}$.

  Com rang M ≠ rang M ' ⇒ sistema incompatible ⇒ no hi ha cap punt que pertany a l'hora als dos plans.
  Diem que els dos plans són **paral·lels**.

- **rang M = 1 i rang M' = 1.**

  Condició equivalent a: $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A'}} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{B'}} = \dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{C'}} = \dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{D'}}$.

  El sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat, i els dos plans són el mateix pla.

Exemple:
Estudiarem la posició relativa dels plans π_1: $3x + 4y + 2z = 1$ i π_2: $4x + 2y + az = 3$ en funció del paràmetre a.
Com

$$\frac{3}{4} \neq \frac{4}{2} \Rightarrow \pi_1 \text{ i } \pi_2 \text{ no són mai paral·lels} \Rightarrow \text{sempre tenen una recta en comú}$$

RECTA - RECTA.

Siguin r i s les rectes d'equacions:

$$r: \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad \text{i} \quad s: \frac{x - b_1}{u_1} = \frac{y - b_2}{u_2} = \frac{z - b_3}{u_3} \ ,$$

expressades a partir de l'equació paramètrica, són:

$$r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda\, v_1 \\ y = a_2 + \lambda\, v_2 \\ z = a_3 + \lambda\, v_3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = b_1 + \mu\, u_1 \\ y = b_2 + \mu\, u_2 \\ z = b_3 + \mu\, u_3 \end{cases}$$

Si ara busquem els punts que tenen en comú r i s,

$$(x_0,y_0,z_0) \in r \cap s \Leftrightarrow \exists\ \lambda_0\ ,\ \mu_0 \text{ tals que } \begin{cases} x_0 = a_1 + \lambda_0\, v_1 = b_1 + \mu_0\, u_1 \\ y_0 = a_2 + \lambda_0\, v_2 = b_2 + \mu_0\, u_2 \\ z_0 = a_3 + \lambda_0\, v_3 = b_3 + \mu_0\, u_3 \end{cases}$$

és a dir:

$$\text{hi ha intersecció} \Leftrightarrow \text{el sistema } \begin{cases} \lambda\, v_1 - \mu\, u_1 = b_1 - a_1 \\ \lambda\, v_2 - \mu\, u_2 = b_2 - a_2 \\ \lambda\, v_3 - \mu\, u_3 = b_3 - a_3 \end{cases} \text{ admet solució en } \lambda \text{ i } \mu\ .$$

Discutim aquest sistema, per això cal considerar les matrius:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & -u_1 \\ v_2 & -u_2 \\ v_3 & -u_3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M' = \left(\begin{array}{cc|c} v_1 & -u_1 & b_1 - a_1 \\ v_2 & -u_2 & b_2 - a_2 \\ v_3 & -u_3 & b_3 - a_3 \end{array}\right)$$

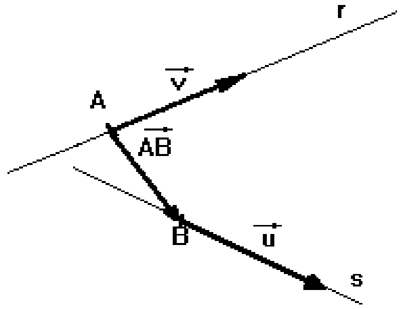
es poden produir les següents situacions:

- **rang M = 2 i rang M' = 3.**

  Condició equivalent a **det(**$\vec{v}$**,** $\vec{u}$**,** $\overrightarrow{AB}$ **)** $\neq$ **0** .

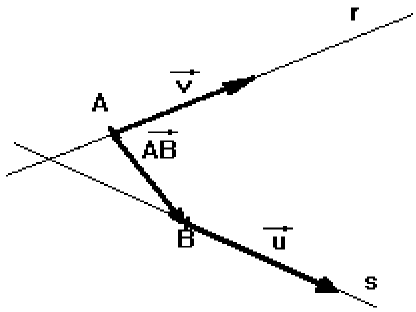
  El sistema és incompatible i les rectes no tenen cap punt en comú.

  Els vectors directors i el vector que va d'un punt de la primera recta a la segona, són linealment independents; i diem que les rectes **s'encreuen**.



- **rang M = 2 i rang M' = 2.**

  Condició que equival a **det(**$\vec{v}$**,** $\vec{u}$**,** $\overrightarrow{AB}$ **) = 0 i** $\vec{v}$**,** $\vec{u}$ **linealment independents**.



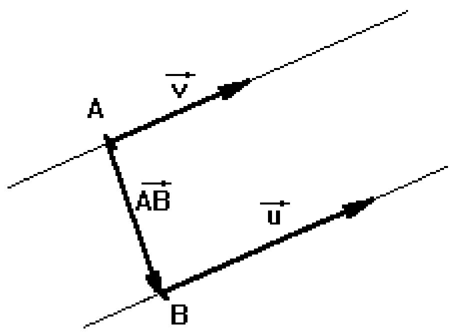
  El sistema és compatible determinat i, per tant, les rectes tenen un únic punt en comú.

  Es diu que les rectes es **tallen en un punt**.

- **rang M = 1 i rang M' = 2.**

  Caracteritzat per: $\vec{v}$ **i** $\vec{u}$ **proporcionals mentre que,** $\vec{v}$ **i** $\overrightarrow{AB}$ **no proporcionals**.

  El sistema és incompatible i les dues rectes no tenen cap punt en comú; a més, com els vectors $\vec{v}$, $\vec{u}$ són proporcionals, tindrem que les dues rectes tenen la mateixa direcció, i diem que r i s són **paral·leles**.



- **rang M = 1 i rang M' = 1**.

  $\vec{v}$, $\vec{u}$ i $\overrightarrow{AB}$ són tots ells proporcionals, i les rectes r i s **coincideixen**.

Exemple:

Estudiem la posició relativa de les rectes:

r:(x,y,z) = (1,2,3) + λ(2,3,-1) i s: (x,y,z) = (2,2,3) + μ(3,-6,2).

Com $\det(\vec{AB},\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 3 \\ 2-2 & 3 & -6 \\ 3-3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r i s es tallen o són paral·leles.

Com els vectors directors no són proporcionals $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ no són paral·leles.

Per tant r i s tenen un punt en comú.

RECTES COPLANARIES.

Dues rectes es diuen coplanaries ⇔ existeix un pla que les conté a les dues.

Si les rectes són:

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \qquad s: \frac{x-b_1}{u_1} = \frac{y-b_2}{u_2} = \frac{z-b_3}{u_3}$$

r i s coplanaries ⇔ $\det(\vec{v},\vec{u},\vec{AB})=0$.

PLA DETERMINAT PER DUES RECTES.

Dues rectes r i s ens determinen una pla ⇔ es tallen en un punt o, essent diferents, són paral·leles.

PLA DETERMINAT PER DUES RECTES QUE ES TALLEN.

Si les rectes són:

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \qquad s: \frac{x-b_1}{u_1} = \frac{y-b_2}{u_2} = \frac{z-b_3}{u_3}$$

Si r i s es tallen en un punt, el pla que determinen passarà pel punt A (o si es vol B) i tindrà les direccions de r i s.

És a dir, el pla ve determinat pel punt A i els vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$.

Per tant

$$\pi: \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 & u_1 \\ y-a_2 & v_2 & u_2 \\ x-a_3 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple:

Decidiu si les rectes següents determinen un pla. En cas afirmatiu trobeu-ne l'equació.

$$r:(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(2,3,-1) \quad \text{i} \quad s: (x,y,z) = (2,2,3) + \mu(3,-6,2).$$

Estudiem en primer lloc la posició relativa entre r i s:

Com $\det(\overrightarrow{AB},\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 3 \\ 2-2 & 3 & -6 \\ 3-3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r i s es tallen o só paral·leles.

Els vectors directors no són proporcionals $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ r i s no són paral·leles.

Per tant r i s tenen un punt en comú $\Rightarrow$ r i s determinen un pla.

Trobem el pla que determinen:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & 3 & -6 \\ z-3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -7y -21z + 77 = 0 \Rightarrow \pi: y + 3z - 11 = 0.$$

PLA DETERMINAT PER DUES RECTES PARAL·LELES.

Donades les rectes

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \quad \text{i} \quad s: \frac{x-b_1}{u_1} = \frac{y-b_2}{u_2} = \frac{z-b_3}{u_3}$$

si r i són paral·leles, el pla que determinen passarà pels punt A i B (per tant, tindrà la direcció del vector $\overrightarrow{AB}$) i també tindrà la direcció del vector $\vec{v}$ (o la del vector $\vec{u}$, que és la mateixa).

Per tant el pla que conté a r i a s és: $\pi: \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 & b_1-a_1 \\ y-a_2 & v_2 & b_2-a_2 \\ x-a_3 & v_3 & b_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$.

RECTA - PLA.

Considerem el pla $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ i la recta d'equació paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda\, v_1 \\ y = a_2 + \lambda\, v_2 \\ z = a_3 + \lambda\, v_3 \end{cases}$$

Per estudiar la possible intersecció entre ells ens cal plantejar el sistema de les seves equacions. Si fem la substitució, la intersecció es correspon a les solucions de l'equació:

$A(a_1+\lambda v_1)+B(a_2+\lambda v_2)+C(a_3+\lambda v_3)+D = 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D + \lambda(Av_1+v_2+v_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(Av_1+Bv_2+Cv_3) = -(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D) \quad (1)$$

Abans de veure'n les solucions, mirem quina interpretació es pot fer de cada membre:

$\vec{u}$ i $\vec{w}$ són les direccions de $\pi \Rightarrow A=\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $B=-\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}$ i $C=\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}$

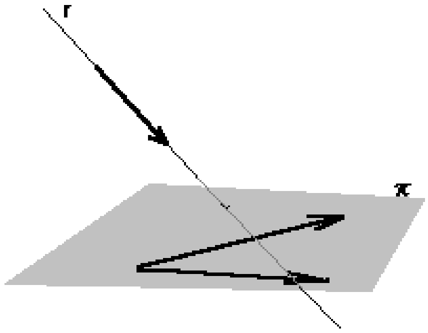
amb el que:

$$Av_1+Bv_2+Cv_3 = v_1\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} - v_2\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + v_3\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix} =$$
$$=\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}).$$

Per altra banda, el segon membre, correspon a comprovar si el punt A pertany al pla o no, segons el seu valor sigui zero o no.

Estudiem ara la compatibilitat de l'equació, es poden produir les següents situacions:

- Si $\mathbf{Av_1+Bv_2+Cv_3 \neq 0}$. Que equival a $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \neq 0$.

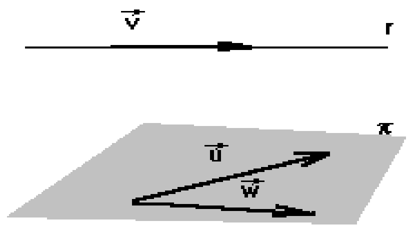


Llavors $\lambda = \dfrac{-(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D)}{Av_1+Bv_2+Cv_3}$

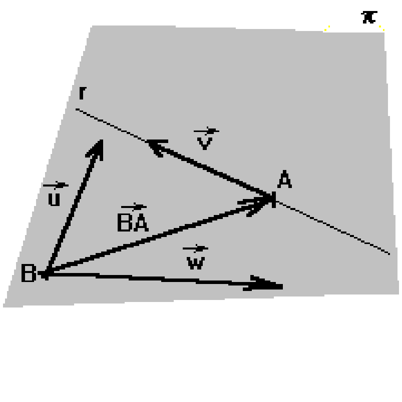
I l'equació admet solució única.
La recta i el pla tenen un únic punt en comú , i diem que:

r és incident al pla π .

- Si $\mathbf{Av_1+Bv_2+Cv_3 = 0}$.
  $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$ vector director de r és comb lin dels vect direct de π .
  En aquest cas, hem de distingir dues possibilitats:
  - $\mathbf{Aa_1+Ba_2+Ca_3+D \neq 0}$
    L'equació no admet solució amb el que la recta i el pla no tenen cap punt en comú i diem que
    r i π són paral·lels.



  - $\mathbf{Aa_1+Ba_2+Ca_3+D=0}$.



Qualsevol valor de λ, compleix l'equació ⇒ tot punt de la recta compleix l'equació del pla ⇒ la recta és dintre el pla. **r** $\subset \pi$.

En resum, la posició entre la recta $x = A + \lambda\vec{v}$ i el pla $Ax+By+Cz+D=0$ és:

$Av_1+Bv_2+Cv_3 \neq 0$	r i π es tallen en un punt	r és incident a π
$Av_1+Bv_2+Cv_3 = 0$ i $Aa_1+Ba_2+Ca_3+D\neq 0$	r i π no tenen cap punt en comú	r és paral·lela a π
$Av_1+Bv_2+Cv_3 = 0$ i $Aa_1+Ba_2+Ca_3+D = 0$	r i π tenen infinits punts en comú	r inclosa a π

Exemple:

Considerem el pla π: $x + 2y + 3z + 2 = 0$ i la família de rectes r_a : $x = ay = 2z$.
Estudiem la posició relativa de π i r_a en funció del paràmetre.

El vector director de r_a és (1, 1/a i 1/2); vector que, com a vector director, és equivalent al $\vec{v}$ =(2a,2,a).
És clar que un punt de r_a és el (0,0,0).

Pel que fa al pla, vector $\vec{n} = (A,B,C) = (1,2,3)$.

Estudiem l'expressió $Av_1+Bv_2+Cv_3$.

$$Av_1+Bv_2+Cv_3 = 1\cdot 2a+2\cdot 2+3\cdot a = 4 + 5a \Leftrightarrow \quad 4 + 5a = 0 \Leftrightarrow a = -5/4 \ .$$

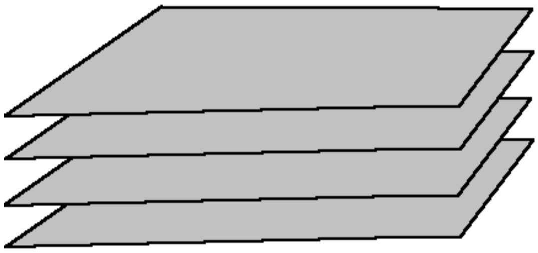
Per tant:

- Si $a \neq -5/4 \Rightarrow$ r_a i π es tallen en un punt.
- Si $a = -5/4 \Rightarrow$ $Aa_1+Ba_2+Ca_3+D = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ r paral·lela a π .

FEIXOS DE PLANS.

FEIX DE PLANS PARAL·LELS.

Anomenem feix de plans paral·lels el conjunt de tots els plans paral·lels entre ells.
Aquest conjunt sempre es pot expressar a partir de l'equació:



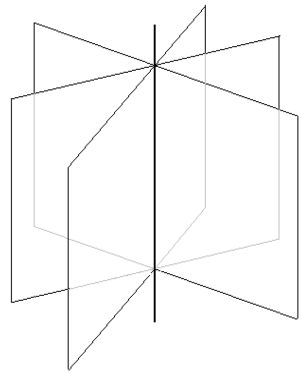
$Ax + By + Cz + \lambda = 0$ amb $\lambda \in R$
on per a cada valor de λ, trobem un únic pla del feix, i al revés, per a cada pla trobem una única λ que determina l'equació.

Exemple:

Trobem el pla paral·lel a $x + 2y - 5z = 1$, que passa per l'origen de coordenades.

El pla buscat té la forma $x + 2y - 5z = D$, per una certa D.
Com passa per $(0,0,0) \Rightarrow$ $0 + 2\cdot 0 - 5\cdot 0 = D \Rightarrow D = 0$.
Per tant serà el pla $x + 2y - 5z = 0$.

FEIX DE PLANS D'ARESTA UNA RECTA.



Donada la recta r: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Anomenem **feix de plans d'aresta r, al conjunt de plans que contenen la recta r.**

Tot pla que passa per r, es pot expressar com
$(\lambda A+\mu A')x +(\lambda B+\mu B')y + (\lambda C+\mu C')z + \lambda D+\mu D'=0$ per a certes λ,μ .
Ja que:
Si un pla té la forma π: $(\lambda A+\mu A')x +(\lambda B+\mu B')y + (\lambda C+\mu C')z + \lambda D+\mu D'=0$,
operant ens queda: $\lambda\ (Ax + By + Cz + D) + \mu\ (A'x + B'y + C'z + D') = 0$,
amb el que: tot punt de la recta r compleix l'equació del pla, dons és $\lambda\cdot 0 +\mu\cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r \subset \pi \Rightarrow$ el pla π és del feix de plans d'aresta r.

Per altra banda, si un pla π : A"x + B" y + C"z + D" , és del feix $\Rightarrow r \subset \pi \Rightarrow$
$\Rightarrow$ el sistema format per les equacions de la recta i l'equació del pla és compatible indeterminat $\Rightarrow$ l'equació del pla és combinació lineal de les equacions de la recta.

Observació:

Quan un dels dos paràmetres és diferent de zero, (per exemple $\lambda\neq 0$) podem dividir l'expressió per aquest paràmetre i obtenim:

$$(A+\mu/\lambda A')x +(B+\mu/\lambda B')y + (C+\mu/\lambda C')z + D+\mu/\lambda D' = 0 \quad \mu\in R$$

i anomenant ν al quocient μ/λ, l'equació del feix és:

$$(A+\nu A')x +(B+\nu B')y + (C+\nu C')z + D+\nu D' = 0 \quad \text{amb } \nu\in R.$$

Exemple:

Trobeu l'equació del pla que passa pel punt de coordenades (1,2,3) i per la recta intersecció dels plans π: $2x - 3y + z = 1$ i π': $x + y - z = 3$.

El pla buscat conté la recta $\pi \cap \pi' \Rightarrow$ serà un pla del feix de plans d'aresta aquesta recta; per tant el pla buscat té la forma :

$$(2+\nu)x + (-3+\nu)y + (1-\nu)z = 1+3\nu \qquad (1).$$

Si passa per (1,2,3) $\Rightarrow (2+\nu)\cdot 1 + (-3+\nu)\cdot 2 + (1-\nu)\cdot 3 = 1+3\nu$

$$\Rightarrow 2-6+3 +(1+2-3)\nu = 1 + 3\nu \Rightarrow -2 = 3\nu \Rightarrow \nu = -2/3 .$$

Substituint a (1) : $(2-2/3)x + (-3-2/3)y + (1+2/3)z = 1 +3(-2/3)$,
és a dir $4/3\ x - 11/3\ y + 5/3\ z = -1$;

amb el que el pla buscat és el $4x - 11y + 5z = -3$.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA D'UN SISTEMA DE 3 x 3 .

Quan tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites, sempre podem identificar cada una de les equacions amb l'equació d'un pla.
Per tant:
(x,y,z) és solució del sistema $\Leftrightarrow$ verifica les tres equacions simultàniament .

Tindrem que:
(x,y,z) és solució del sistema $\Leftrightarrow$ el punt (x,y,z) pertany a l'hora als tres plans.

Exemple:

Estudiem i interpretem geomètricament el sistema lineal $\begin{cases} 2y - 2z = 1 \\ 3x + z = 4 \\ 12x + 4y = a \end{cases}$.

La seva matriu ampliada és $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 0 & a \end{pmatrix}$

Estudiem rang A.

$$\left.\begin{array}{l} \det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 24 - 24 = 0 \Rightarrow \text{rang } A \neq 3 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rang } A = 2 .$$

Com

$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2a-36$. $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 12 & a & 0 \end{vmatrix} = -6a+108$ i $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & a \end{vmatrix} = 108 - 6a$.

Tenim que:

- Si $a \neq 18 \Rightarrow M_1 \neq 0 \Rightarrow$ rang A' = 3 $\Rightarrow$ el sistema és incompatible $\Rightarrow$ els tres plans no tenen cap punt en comú.
- Si $a = 18 \Rightarrow M_1 = M_2 = M_3 = 0 \Rightarrow$ rang A' $\neq 3$.
  Com a $2 = \text{rang } A \leq \text{rang } A' \neq 3 \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A' = 2$.
  Per tant és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
  Geomètricament, tenim que els tres plans tenen una recta en comú.