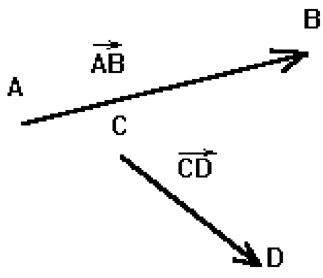
VECTORS LLIURES DEL PLA.

CONCEPTE DE VECTOR FIX DEL PLA.

Si A i B són dos punts del pla ordinari, anomenem vector fix de A a B, al segment orientat que va del punt A al punt B. Aquest vector s'acostuma a designar per $\overrightarrow{AB}$.



El punt A, primer punt del vector fix $\overrightarrow{AB}$, es diu **origen** de $\overrightarrow{AB}$ i el punt B es diu **extrem** .

De la longitud del segment $\overrightarrow{AB}$, en diem **mòdul**.

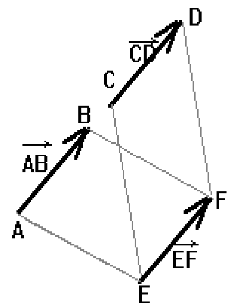
La **direcció** del vector, és la de les rectes paral·leles a la que passa per A i B ; i el **sentit** és el que va de l'origen a l'extrem.

EQUIPOL·LÈNCIA DE VECTORS FIXOS DEL PLA.

Quan tenim $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ dos vectors fixos del pla, diem que:

$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són **equipol·lents** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ es compleix alguna de les condicions següents:

* La figura ABDC és un paral·lelogram.
* A=B i C=D ($\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són **vectors nuls**).
* Existeix un tercer vector fix $\overrightarrow{EF}$, de manera que ABFE i CDFE són dos paral·lelograms.



La relació d'equipol·lència és una relació d'equivalència, doncs compleix les propietats

≡ reflexiva: Tot vector és equipol·lent a si mateix .
≡ simètrica: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$.
≡ transitiva: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

ELS VECTORS LLIURES DEL PLA.

Per ser ≡ una relació d'equivalència, podrem considerar les classes d'equivalència, formades per tots els vectors que són equipol·lents entre ells:

classe $\overrightarrow{AB}$ = [$\overrightarrow{AB}$] = {$\overrightarrow{XY}$ equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$}

De cada una d'aquestes classes d'equivalència, en diem **vector lliure** i l'acostumem a representar en la forma $\vec{v}$.

Observeu que:

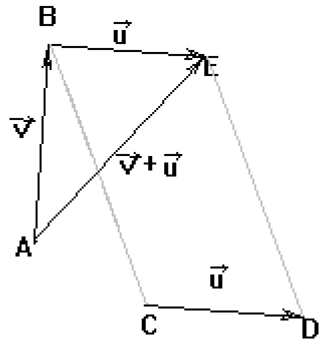
- Per referir-nos a $\vec{v}$ ho podem fer amb qualsevol dels vectors fixos de la classe d'equipol·lència de $\overrightarrow{AB}$.
- Fixat un punt P, per qualsevol vector lliure $\vec{v}$ que considerem , sempre podem trobar un punt Q de manera que $\vec{v}$ = [$\overrightarrow{PQ}$] .
- Donats $\vec{v}$ = [$\overrightarrow{AB}$] i $\vec{u}$ = [$\overrightarrow{CD}$]

  $\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

SUMA DE VECTORS LLIURES.

Siguin $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{u} = [\overrightarrow{CD}]$ dos vectors lliures del pla, definim $\vec{v} + \vec{u}$, seguint el següent procediment:

Busquem un vector fix de la classe de $\vec{u}$, que tingui per origen l'extrem del representant de la classe $\vec{v}$, en aquest cas el punt B, i tindrem que $\vec{u} = [\overrightarrow{BE}]$.
Llavors definim la suma $\vec{v} + \vec{u} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BE}] = [\overrightarrow{AE}]$.



És fàcil veure que els vectors lliures del pla amb la suma compleixen les següents propietats:

- **Associativa**: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- **Commutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Existeix element neutre**: $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}]$.
- **Existeix element oposat**: $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}] \Rightarrow -\vec{u} = [\overrightarrow{BA}]$.

Per tant els vectors lliures del pla amb la suma són un **grup abelià**.

PRODUCTE PER ESCALARS.

Donat $\vec{u}$ un vector lliure del pla, definim el producte del vector $\vec{u}$ per un nombre de la següent forma:

- Si n és natural $\quad n\,\vec{u} = \vec{u} + \ldots + \vec{u}$ = sumar n cops $\vec{u}$.
- Si n és enter $\quad n\,\vec{u} = \vec{u} + \ldots + \vec{u}$ quan $n \geq 0$
  $n\,\vec{u} = (-\vec{u}) + \ldots + (-\vec{u})$ quan $n \leq 0$.
- Si $q \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\vec{u}}{q} = \vec{w}$ de manera que $q\,\vec{w} = \vec{u}$.
- Si r és racional $r = \dfrac{p}{q} \Rightarrow r\,\vec{u} = p\,\dfrac{\vec{u}}{q}$.
- Si λ és real $\Rightarrow \lambda = \text{lím } r_n$ amb r_n racionals definim doncs $\lambda\vec{u} = \text{lím } r_n \vec{u}$.

PROPIETATS.

El conjunt dels vectors lliures del pla, amb aquest producte per escalars, compleixen les següents propietats:

- **Distributiva respecte la suma de vectors:** $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$
- **Distributiva respecte la suma de reals:** $(\lambda + \mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$
- **Associabilitat mixta:** $\lambda(\mu\,\vec{u}) = (\lambda\mu)\,\vec{u}$
- $1\,\vec{v} = \vec{v}$

VECTORS LLIURES DE L'ESPAI.

Per tal de construir el conjunt dels vectors lliures de l'espai, seguim el mateix procés que hem utilitzat pels vectors lliures del pla.

VECTOR FIX DE L'ESPAI.

Donats dos punts A i B de l'espai ordinari, anomenem vector fix d'origen A i extrem B, al parell ordenat (A,B) aquest vector s'acostuma a designar per $\overrightarrow{AB}$.

Del primer punt del vector fix $\overrightarrow{AB}$ en diem **origen** i del segon punt en diem **extrem**. De la longitud del segment AB, en diem **mòdul**.
La direcció del vector, és la de les rectes paral·leles a la recta que passa per A i B i el sentit és el que va de l'origen a l'extrem.

EQUIPOL.LÈNCIA DE VECTORS FIXOS DE L'ESPAI.

Donats $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ dos vectors fixos de l'espai, diem que:

$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són **equipol·lents** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ es compleix alguna de les condicions següents:

- La figura ABDC és un paral·lelogram.
- A=B i C=D ($\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són vectors nuls).
- Existeix un tercer vector fix $\overrightarrow{EF}$, de manera que ABFE i CDFE són dos paral·lelograms.

És fàcil de comprovar que la relació d'equipol·lència compleix les propietats:

- $\equiv$ reflexiva: tot vector és equipol·lent a ell mateix .
- $\equiv$ simètrica: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$.
- $\equiv$ transitiva: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

i, per tant, que és una relació d'equivalència. Podem així considerar les classes d'equipol·lència, cada una de les quals està formada per tots els vectors que són equipol·lents entre ells:

$$\text{classe } \overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{XY} \text{ equipol·lent a } \overrightarrow{AB}\}$$

ELS VECTORS LLIURES DE L'ESPAI.

Anomenem vector lliure de l'espai a cada una de les classes d'equipol·lència de vectors fixos de l'espai. Els designarem en la forma $\vec{v}$.

- Per referir-nos a $\vec{v}$ ho podem fer amb qualsevol dels vectors fixos de la classe d'equipol·lència de $\overrightarrow{AB}$.

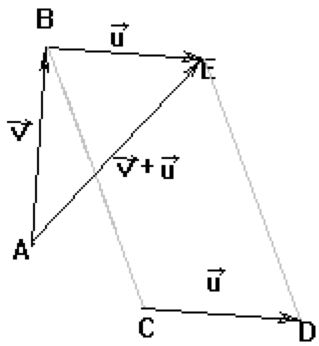
- Fixat un punt P, per qualsevol vector lliure $\vec{v}$, sempre podem trobar un altre punt Q de manera que $\vec{v} = [\overrightarrow{PQ}]$.

- Donats $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{u} = [\overrightarrow{CD}]$
  $\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

SUMA DE VECTORS LLIURES DE L'ESPAI.

Siguin $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{u} = [\overrightarrow{CD}]$ dos vectors lliures de l'espai, definim la suma $\vec{v} + \vec{u}$, seguint el següent procediment:

Busquem un vector fix de la classe de $\vec{u}$, que tingui per origen l'extrem del representant de la classe $\vec{v}$, en aquest cas el punt B, i tindrem que $\vec{u} = [\overrightarrow{BE}]$.
Llavors definim la suma $\vec{v} + \vec{u} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BE}] = [\overrightarrow{AE}]$.



És fàcil veure que, els vectors lliures del pla amb la suma compleixen les següents propietats:

- **Associativa**: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- **Commutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Existeix element neutre**: $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}]$.
- **Existeix element oposat**: $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \Rightarrow -\vec{v} = [\overrightarrow{BA}]$.

amb el que els vectors lliures de l'espai tenen l'estructura de grup abelià.

PRODUCTE PER ESCALARS.

Donat $\vec{u}$ un vector lliure de l'espai, definim el producte del vector $\vec{u}$ per un nombre, seguint el mateix mètode que pels vectors lliures del pla, és a dir:

- Si n és natural $\quad n\,\vec{u} = \vec{u} + ... + \vec{u}$ = sumar n cops $\vec{u}$.
- Si n és enter $\quad n\,\vec{u} = \vec{u} + ... + \vec{u}$ quan $n \geq 0$
  $n\,\vec{u} = (-\vec{u}) + ... + (-\vec{u})$ quan $n \leq 0$.
- Si $q \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\vec{u}}{q} = \vec{w}$ de manera que $q\vec{w} = \vec{u}$.
- Si r és racional $r = \dfrac{p}{q} \Rightarrow r\vec{u} = p\dfrac{\vec{u}}{q}$.
- Si λ és real $\Rightarrow \lambda = \text{lím } r_n$ amb r_n racionals definim doncs $\lambda\vec{u} = \text{lím } r_n\vec{u}$.

PROPIETATS.

El conjunt dels vectors lliures de l'espai, amb aquest producte per escalars, compleix les següents propietats:

- **Distributiva respecte la suma de vectors:**
  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$
- **Distributiva respecte la suma de reals:**
  $(\lambda + \mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$
- **Associabilitat mixta:**
  $\lambda(\mu\,\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
- $1\,\vec{v} = \vec{v}$

ESPAI VECTORIAL.

CONCEPTE.

Anomenem R-espai vectorial a l'estructura formada per un conjunt $E \neq \emptyset$ i el cos dels reals R, de manera que:
(E,+) és un grup abelià i existeix una operació externa

$$\begin{aligned} R \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{v}) &\longrightarrow \lambda\vec{v} \end{aligned}$$

que compleix les següents és propietats:

[e1]	$\lambda,\mu \in R$ i $\vec{v} \in E$	$(\lambda+\mu)\,\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
[e2]	$\lambda \in R$ i $\vec{v},\vec{w} \in E$	$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
[e3]	$\lambda,\mu \in R$ i $\vec{v} \in E$	$\lambda(\mu(\vec{v})) = (\lambda\mu)\,\vec{v}$
[e4]	$\vec{v} \in E$	$1\vec{v} = \vec{v}$

Recordem que dels elements de E, en diem vectors i que dels de R en diem escalars, per això aquesta aplicació rep el nom de **producte per escalars**.

Exemples:

- El conjunt R és un R espai vectorial.
- El conjunt C dels nombres complexos és un R espai vectorial.
- El conjunt dels polinomis amb coeficients reals de grau $\leq$ n és un R espai vectorial.
- El conjunt de vectors lliures del pla és R espai vectorial.
- $R^n = \{(a_1,a_2,...,a_n) \,/\, a_1,a_2, ..., a_n \in R\}$
  amb la suma $(a_1,a_2,..,a_n) + (b_1,b_2,..,b_n) = (a_1+b_1,a_2+b_2,..,a_n+b_n)$
  i el producte per escalars $\lambda\,(a_1,a_2,...,a_n) = (\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$
  és un R espai vectorial.

PROPIETATS IMMEDIATES:

Si (E,+) és un R espai vectorial es compleix que:

- $\mathbf{0}\vec{v} = \vec{0}$.
  Ja que $0\vec{v} = (0+0)\,\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$.
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.
  Ja que $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0}+\vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{0} = \vec{0}$.
- $\boldsymbol{\lambda\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0}$ **o** $\boldsymbol{\vec{v} = \vec{0}}$**.**
  Ja que si $\lambda=0$ està demostrada la propietat
  si $\lambda\neq 0 \Rightarrow$ existeix $1/\lambda \in R$, operant per $1/\lambda$
  $1/\lambda(\lambda\cdot\vec{v}) = 1/\lambda\cdot\vec{0} \Rightarrow (1/\lambda)\lambda\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow 1\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
- **(-1)** $\vec{v} = -\vec{v}$.
  Ja que $\vec{v} + (-1)\vec{v} = (1-1)\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ l'oposat de $\vec{v}$ és $(-1)\,\vec{v}$.
- $\boldsymbol{\lambda\vec{w} = \lambda\vec{v}}$ **i** $\boldsymbol{\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}}$**.**
  Ja que si $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ existeix $1/\lambda \in R$ i per tant
  $\vec{w} = ((1/\lambda)\;\lambda)\;\vec{w} = 1/\lambda(\lambda\vec{w}) = 1/\lambda(\lambda\vec{v}) = ((1/\lambda)\,\lambda)\;\vec{v} = \vec{v}$.
- $\boldsymbol{\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}}$ **i** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu}$.
  Ja que $\lambda\vec{v} = \mu\vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda-\mu)\;\vec{v} = \vec{0}$ i
  per hipòtesi $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

SUBESPAIS VECTORIALS.

Sigui (E,+) un R espai vectorial i **S** un subconjunt de E

Diem que S és un subespai vectorial de E $\Leftrightarrow$ S és un R espai vectorial amb la suma i el producte per escalars induïts per E en S.

Exemples:

- $S=\{(x,y)/\ 3x+2y=0\}$ és subespai vectorial de R^2 .
- $S=\{(x,y,z)/\ x+y+z=0\}$ és subespai de R^3 .
- E i $\{\vec{0}\}$ sempre són subespais de l'espai E, per la qual cosa reben el nom de subespais impropis.

PROPIETAT.

$S \subset E$ és un subespai vectorial $\Leftrightarrow$

[s1] $S \neq \varnothing$

[s2] $\vec{w}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{w} + \vec{v} \in S$

[s3] $\lambda \in R$ i $\vec{v} \in S \Rightarrow \lambda\vec{v} \in S$

Demostració:

$\Rightarrow$ És evident.

$\Leftarrow$ Per [s2] la suma és una operació interna a S.
Com tot element de S és també element de E, tindrem que: la suma d'elements de S és associativa i commutativa.
Com $S \neq \varnothing \Rightarrow$ existeix $\vec{v} \in S$ i per [s3] $\vec{0} = 0\vec{v} \in S$
$\Rightarrow$ la suma a S té element neutre.
Si $\vec{v} \in S$, per [s3] $-\vec{v} = (-1)\ \vec{v} \in S$, amb el que, tot element de S, té oposat a S
Així doncs S amb la suma induïda és un grup abelià.
Per altra banda, tot element de S és també element de E, els elements de S compliran les propietats del producte escalar induït.

És relativament fàcil de comprovar que:

Si S_1 i S_2 són subespais de E $\Rightarrow S_1 \cap S_2$ és subespai de E .

COMBINACIÓ LINEAL

Sigui (E,+) un R espai vectorial i $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in E$ i $\vec{u} \in E$,diem que

$\vec{u}$ és combinació lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \Leftrightarrow$ existeixen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ tals que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + .. + \lambda_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{v}_i$$

Exemples:

- A R^2 el vector (4,2) és combinació lineal de (1,-1) i (2,4)
  doncs: (4,2) = 2 (1,-1) + 1 (2,4) .
- A tot R espai vectorial E, el vector $\vec{0}$ sempre és combinació lineal de qualsevol conjunt de vectors no buit, doncs: $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n$.

INDEPENDÈNCIA LINEAL-DEPENDÈNCIA LINEAL

Si (E,+) és un R esp vect i S={ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ } conjunt de vectors de E , diem que:
S és un sistema linealment independent o lliure o que
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ... , $\vec{v}_n$ són linealment independents $\Leftrightarrow$ per que una combinació lineal amb aquests vectors sigui $\vec{0}$, tots els escalars han de ser zero .
És a dir:
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ són linealment independents $\Leftrightarrow$

$$[\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 +..+ \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\ ] \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,..,\lambda_n = 0$$

S és un sistema linealment dependent o lligat o que
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ són linealment dependents $\Leftrightarrow$ existeixen λ_1, λ_2,..., λ_n no tots nuls de manera que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$.

Observeu que un sistema de vectors és linealment dependent $\Leftrightarrow$ no són linealment independents.

PROPIETATS.
S={$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$} sistema de vectors de E, R espai vectorial
S és Linealment Dependent $\Leftrightarrow$ existeix $\vec{v}_i \in$ S tal que $\vec{v}_i$ és combinació lineal dels altres vectors del sistema .

Ja que:

$\Leftarrow$ Si aquest $\vec{v}_i$ és el que ocupa el primer lloc, si no és així reordenant el conjunt aconseguim que sigui el primer .
Per tant $\vec{v}_1 = \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + .. + \lambda_n\vec{v}_n$;
si ho passem tot al mateix membre, $\vec{0} = 1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2 - \lambda_3\vec{v}_3 - .. - \lambda_n\vec{v}_n \Rightarrow$
obtenint una combinació lineal que dóna $\vec{0}$. on no tots els escalars són 0 $\Rightarrow$ són LD.

$\Rightarrow$ Si el sistema és LD $\Rightarrow$ existeixen $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n \in$ R, no tots nuls, de manera que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 +..+ \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ **(1)**
Suposem que la $\lambda \neq 0$ és la λ_1 , si no fos així reordenant el sistema ho aconseguiríem.
Com $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$ existeix $1/\lambda_1 \in$R .
Si multipliquem escalarment l'equació (1) per $1/\lambda_1$ tenim que

$$\lambda_1 1/\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2 1/\lambda_1\vec{v}_2 +..+ \lambda_n 1/\lambda_1\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow 1\vec{v}_1 + \lambda_2/\lambda_1\vec{v}_2 +..+ \lambda_n/\lambda_1\vec{v}_n = \vec{0},$$

i isolant $\vec{v}_1$ obtenim:

$$\vec{v}_1 = -\lambda_2/\lambda_1\vec{v}_2 -...- \lambda_n/\lambda_1\vec{v}_n \quad .$$

Amb el que $\vec{v}_1$ és combinació lineal dels altres vectors del sistema.

Com a conseqüència d'aquesta propietat, podem afirmar que:

- **Tot sistema que contingui el vector $\vec{0}$ és L D .**
  Doncs el $\vec{0}$ sempre és combinació lineal de qualsevol sistema, amb el que, sempre hi ha un vector combinació lineal dels altres vectors del sistema.
- **Si S_1 i S_2 són dos sistemes de vectors i $S_1 \subset S_2$ i S_1 és LD $\Rightarrow$ S_2 és LD .**
- **Si S_1 i S_2 són dos sistemes de vectors i $S_2 \subset S_1$ i S_1 és L I $\Rightarrow$ S_2 és LI .**

GENERADORS

Sigui (E,+) un R espai vectorial

Diem que S={ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$} és un sistema de generadors de E

⇔ tot vector de E es pot expressar com a combinació lineal dels elements de S.

⇔ $\forall\ \vec{u} \in E\ \ \exists\ \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in R$ de manera que $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + .. + \lambda_n\vec{v}_n$.

Donat C subconjunt de E, el conjunt format per tots els vectors que es poden posar com a combinació lineal dels elements de C, és un subespai vectorial de E, que en diem **subespai generat per C.**

Es diu que un espai és de **generació finita** si admet un nombre finit de generadors.

Es pot comprovar que:

Si S_1 i S_2 són dos sistemes de vectors $S_1 \subset S_2$ i S_1 generadors $\Rightarrow S_2$ generadors .

BASE I DIMENSIÓ - COMPONENTS D'UN VECTOR .

Donat (E,+) espai vectorial i B ={$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,..,$\vec{e}_n$} un sistema de vectors de E diem que:

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,..., $\vec{e}_n$ són una base de E ⇔ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,..., $\vec{e}_n$ són linealment independents i generadors de E .

Anomenem **dimensió de l'espai vectorial E, al número de vectors que té una base.**

El teorema de Steinitz, ens garanteix que totes les bases d'un espai vectorial, tenen sempre el mateix número de vectors. Per tant la dimensió d'un espai vectorial no depèn de la base escollida.

Anomenem **rang** d'un sistema de vectors a la dimensió del subespai vectorial que generen.

COMPONENTS D'UN VECTOR EN UNA BASE

Si $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,...,$\vec{e}_n$ és una base de E ⇒ tot vector $\vec{v} \in$ E, es pot posar de forma **única** com combinació lineal d'aquesta base.

És a dir:

Si $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,...,$\vec{e}_n$ són base, per a tot $\vec{v} \in$ E existeixen unes úniques $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in R$ tals que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 +..+ \lambda_n\vec{e}_n$.

D'aquestes úniques λ_1, λ_2, ..., λ_n associades al vector $\vec{v}$, en diem **components del vector $\vec{v}$** en la base $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ i ho representem per $\vec{v} = (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$.

Ja que:

Considerem $\vec{v} \in$ E.

Per ser les ($\vec{e}_i$) base ⇒ són generadors ⇒ existeixen λ_1 ,λ_2 ,..., λ_n de manera que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 +..+ \lambda_n\vec{e}_n \qquad \textbf{(1)}.$$

Si aquesta representació no fos única llavors podríem fer

$$\vec{v} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + .. + \mu_n\vec{e}_n \qquad \textbf{(2)}$$

restant terme a terme l'equació (2) de la (1) obtenim :

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\lambda_1-\mu_1)\ \vec{e}_1 + (\lambda_2-\mu_2)\ \vec{e}_2 + .. + (\lambda_n-\mu_n)\ \vec{e}_n$$

que és una combinació lineal de les $\vec{e}_i$, que dona $\vec{0}$.

Però les ($\vec{e}_i$) són base i per tant són L I $\Rightarrow$ tots els escalars són zero $\Rightarrow$ $(\lambda_1 - \mu_1) = 0$, $(\lambda_2 - \mu_2) = 0$,... , $(\lambda_n - \mu_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$,.., $\lambda_n = \mu_n$; amb el que , la representació de $\vec{v}$ com a combinació lineal de la base, és única.

Fixada $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ base de E R-esp vect, podem identificar cada vector amb les seves n components en aquesta base, i per tant podem identificar E amb R^n.

Exemple:

A l'espai vectorial $\mathbf{P}_n$ ={polinomis de grau $\leq$ n amb coeficients reals}, els polinomis $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x) = x^2$,...,$p_n(x)=x^n$ són una base de $\mathbf{P}_n$. És fàcil de veure que, en aquesta base, podem identificar cada polinomi $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + .. + \lambda_n x^n$ amb $(\lambda_0 , \lambda_1 , .. , \lambda_n) \in R^{n+1}$.