DETEMINANTS

Els determinants ens interessen de manera purament pràctica; per això molts dels resultats sols els enunciarem i deixant per altres cursos la seva demostració.

CONCEPTES PREVIS.

Donats 1,2,..,n números naturals, sabem que una permutació és una aplicació bijectiva entre aquests mateixos números, que provoca una nova ordenació entre ells. Per exemple ρ passa de (1,2,3,4) a (2,1,3,4), ρ és una permutació de 4 elements, on $\rho(1)=2$, $\rho(2)=1$, $\rho(3)=3$ i $\rho(4)=4$.

Si ρ és una permutació de n elements, s'acostuma a escriure com $k_1,k_2,...,k_n$ on $k_i=\rho(i)$. Així a la permutació anterior $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$ i $k_4 = 4$.

Inversió: donada $k_1,k_2,...,k_n$ una permutació, diem que:

k_i i k_j estan en inversió $\Leftrightarrow$ $i<j$ i k_i està després de k_j .

Per exemple a la permutació (2,1,3,4), el 2 i l'1 estan invertits.

L' índex d'una permutació és $(-1)^{\varepsilon}$, on ε és el número d'inversions que té.

Representarem l'índex d'una permutació en la forma $i(\rho)$.

DETERMINANT.

Donem ara el concepte de determinant d'una matriu quadrada.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definim:

$$\mathbf{det\ (A)} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\rho \in \text{permutacions de } 1,\dots,n} i(\rho)\, a_{1\rho(1)}\, a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}$$

Si identifiquem cada columna de la matriu amb un vector de R^n, podem parlar del determinant de n vectors.

Mirem el funcionament del determinant pels ordres 1, 2 i 3:

Quan n=1

La matriu A té un sol element $\Rightarrow$ A = (a)

Amb el conjunt {1}, sols es pot formar una permutació, la $\rho(1) = 1$;

i evidentment no té cap inversió, per tant la permutació és d'índex 1.

Per tant det (A) = a.

Per n = 2

La matriu A és $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Amb el conjunt {1, 2} es poden formar les següents permutacions,

(1, 2) permutació que no té inversions $\Rightarrow$ d'índex 1

(2, 1) permutació que té una inversió $\Rightarrow$ índex -1

I per tant el determinant de 2x2 és:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} + (-1)\, a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \ .$$

Per exemple el determinant de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ és: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$.

Si n = 3

La matriu A és $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Les permutacions del conjunt {1, 2, 3} són

(1, 2, 3)	amb cap inversió	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^0 = 1$
(1, 3, 2)	amb una inversió	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^1 = -1$
(2, 1, 3)	amb una inversió	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^1 = -1$
(2, 3, 1)	amb dues inversions	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^2 = 1$
(3, 1, 2)	amb dues inversions	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^2 = 1$
(3, 2, 1)	amb tres inversions	$\Rightarrow$	índex = $(-1)^3 = -1$

Per tant el determinant d'ordre 3 és:

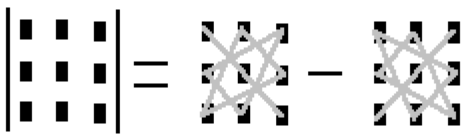
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Expressió que es coneix com a **Regla de Sarrus.**

És fàcil de recordar amb l'esquema següent:



Exemple:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 7 - 7\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 8\cdot 6 - 4\cdot 2\cdot 9 = 0.$$

PROPIETATS DELS DETERMINANTS.

El determinant d'una matriu A és igual al determinant de la seva transposada.

$$\det A = \det A^t$$

(on A^t és la matriu que resulta de canviar les files per les columnes)

És a dir:

Si a una matriu li canviem les files per les columnes, el valor del seu determinant no varia.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ho raonarem solament pels ordres 1, 2 i 3

Per n=1 és evident.

Per n=2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Per n= 3

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

que per la commutabilitat de la suma i del producte de reals, són iguals.

Observeu que:

D'aquest resultat se'n dedueix que totes les propietats dels determinants que siguin vàlides per a les files, també ho seran per les columnes. Per això s'acostumen a enunciar com a propietats de les línies.

Si una matriu quadrada té una línia formada exclusivament per zeros, el valor del determinant és 0.

És a dir: $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{v}_n) = 0$.

Ja que:

Suposem que la línia de zeros és una columna, llavors com el determinant és la suma d'uns productes formats per n elements, un de cada columna. Per tant cada producte té un element de la columna de zeros, amb el que aquests productes seran tots 0.

Si una matriu té zeros sota de la diagonal principal, el valor del seu determinant és el producte dels elements de la diagonal principal.

Ja que:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum i(\rho)\, a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} =$$

$\rho \in$ permutacions de 1,...,n

$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + \sum$ productes on tots tenen un factor que està sota de la diagonal =

$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + \sum$ productes on tots tenen un factor 0 $= a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Si permutem entre sí dues línies, el resultat del determinant, varia de signe.

És a dir: $\mathbf{det}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_i,\dots,\vec{v}_j,\dots\vec{v}_n) = -\,\mathbf{det}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_j,\dots,\vec{v}_i,\dots\vec{v}_n)$.

És evident, doncs si canviem entre elles dues columnes, estem realitzant una inversió a cada una de les permutacions de n elements; amb el que variem tots els signes dels índexs de les permutacions que defineixen el determinant.

Si multipliquem per λ tots els elements d'una línia, el valor del determinant queda multiplicat per λ .

És a dir $\mathbf{det}(\vec{v}_1,\dots,\lambda\vec{v}_i,\dots\dots\vec{v}_n) = \lambda\, \mathbf{det}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_i,\dots\dots\vec{v}_n)$.

Ja que:

$$\det(\vec{v}_1,\lambda\vec{v}_{2_i},\dots\dots\vec{v}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum i(\rho)\, a_{1\rho(1)}\, \lambda\, a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} =$$

$\rho \in$ permutacions de 1,...,n

fent λ factor comú

$$= \lambda \sum i(\rho)\, a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det(\vec{v}_1,\vec{v}_{2_i},\dots\dots\vec{v}_n).$$

Si els elements d'una línia, s'expressen com a suma de dos, el determinant es pot expressar com a suma de dos determinants en la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

És a dir: $\mathbf{det}(\vec{v}_1,\vec{v}_2+\vec{u}_i,\dots\dots\vec{v}_n) = \mathbf{det}(\vec{v}_1,\vec{v}_{2_i},\dots\dots\vec{v}_n) + \mathbf{det}(\vec{v}_1,\vec{u}_i,\dots\dots\vec{v}_n)$

Ho veurem per n=3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+b_2)a_{33} + a_{23}(a_{12}+b_1)a_{31} + a_{21}(a_{32}+b_3)a_{13} - a_{13}(a_{22}+b_2)a_{31} - a_{23}(a_{32}+b_3)a_{11} - a_{21}(a_{12}+b_1)a_{33} =$$

per la propietat distributiva del producte respecte la suma i per commutabilitat de la suma:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} +$$
$$+ a_{11}b_2a_{33} + a_{23}b_1a_{31} + a_{21}b_3a_{13} - a_{13}b_2a_{31} - a_{23}b_3a_{11} - a_{21}b_1a_{33} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} .$$

det (A B) = det (A) det (B) .

La demostració de la qual és relativament senzilla, al menys per n=1,2 i 3.

Si un determinant té dues línies iguals, el seu valor és 0.

És a dir: **det ($\vec{v}_1,...,\vec{u},...,\vec{u},....\vec{v}_n$) = 0** .

Sabem que si a un determinant permutem dues línies entre elles, del determinant varia de signe; si permutem entre elles les dues línies iguales, tindrem que:

det($\vec{v}_1,...,\vec{u},...,\vec{u},....\vec{v}_n$) = - det($\vec{v}_1,...,\vec{u},...,\vec{u},....\vec{v}_n$)

i per tant det($\vec{v}_1,...,\vec{u},...,\vec{u},....\vec{v}_n$) = 0 .

Si una línia és combinació lineal de les altres línies paral·leles, el determinant és zero.

Suposem que la columna n és combinació lineal de les altres columnes $\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i$

llavors $\det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i)$

per les propietats vistes anteriorment tenim que:

$$\det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_{n-1},\lambda_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_i) .$$

Ara bé, cada un d'aquests determinants que se sumen, té dues columnes iguals $\Rightarrow$ cada un dels sumands és 0 $\Rightarrow$ $\det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) = 0$.

Si a una línia li sumem una combinació lineal de les altres línies paral·leles, el valor del determinant no varia .

N'hi ha prou en comprovar-ho per la columna n.

$$\det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i)$$

Ja que:

$$\det(\vec{v}_1...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i) = \det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1...,\vec{v}_{n-1}, + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i) =$$
$$= \det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) + 0 = \det(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1},\vec{v}_n) .$$

Un determinant sempre es pot expressar com a un altre determinant del mateix ordre, que sota la diagonal principal sigui tot zeros. (Mètode de Gauss)

$$\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Ja que:

- Si la matriu està formada exclusivament per zeros, és evident.
- Si la matriu té algun element diferent de zero , seguirem el següent procés:
  1. Permutant files i columnes, sempre podem aconseguir posar aquest element no nul, a la 1ª fila 1ª col. .
  2. El valor del determinant de la nova matriu és ± det A.

     Obtenim així que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{i } a'_{11} \neq 0 \text{ .}$$

Prenem $a'_{11} = b_{11}$ o $a'_{11} = - b_{11}$ segons els signes dels determinants

3. Restant a la fila i , $\dfrac{a'_{i1}}{a'_{11}}$ vegades la 1ª fila, obtenim una nova matriu amb el mateix determinant, i on la 1ª columna té zeros sota la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} b_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Repetint aquest procés per a la segona columna, la tercera ,... obtindrem una matriu triangular , de la que en sabem que el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal principal.

n vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n$ són Linealment Independents ⇔ det($\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n$) ≠ 0 .

Com és equivalent, raonarem que $\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n$ Linealment Dependents ⇔ det($\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n$)=0 .

⇒ Si $\vec{v}_1,\vec{v}_2\dots,\vec{v}_n$ són L D ⇒ n'hi ha un que és combinació lineal dels altres i per la ja sabem que això vol dir que el determinant és zero.

$\Leftarrow$ Si el determinant és 0, per la propietat anterior , ens queda una columna formada exclusivament per zeros $\Rightarrow$ aquesta columna és combinació lineal de les altres $\Rightarrow$ els vectors són LD.

DESENVOLUPAMENT D'UN DETERMINANT.

MENOR COMPLEMENTARI I ADJUNT D'UN ELEMENT.

Donada una matriu quadrada A (n files per n columnes)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observeu que, si suprimim una fila i una columna, ens queda una matriu quadrada d'ordre n-1; aquest fet permet de definir el:

Menor complementari de a_{ij}, com el valor del determinant d'ordre n-1, que resulta de suprimir a la matriu A, la i-èssima fila i la j -èssima columna; el representem per M_{ij}.

Definim també A_{ij} = **Adjunt de l'element a_{ij}** = $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

DESENVOLUPAMENT D'UN DETERMINANT.

El valor d'un determinant és igual a la suma dels productes dels elements d'una columna (fila), pels seus adjunts.

Així respecte de la columna i és:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni} \; .$$

Per n = 1 és evident.

Per n = 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{21} \det(a_{12}) \; .$$

Per n=3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \; .$$

A la pràctica apliquem el desenvolupament dels determinants per calcular els que tenen ordre 4 o major, mentre que pels d'ordre 2 i 3 s'aplica la definició i la regla de Sarrus.

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-9) - 4\cdot 6 + 5\cdot 37 - 2\cdot(-6) = 155.$$