# CONJUNTS

**Concepte de conjunt.**
Anomenarem **conjunt** a qualsevol col·lecció d'objectes concrets, ben definits i diferenciables entre ells, d'aquest objectes en diem **elements** dels conjunt.
Per referir-nos als conjunts, acostumem a utilitzar lletres majúscules A, B , C ... i reservem les minúscules pels elements.
Per dir que un element **x** és d'un conjunt **A**, ho expressem en la forma $\mathbf{x \in A}$ hi ho llegim dient **x pertany al conjunt A**; per indicar que un element x no és del conjunt A posem $\mathbf{x \notin A}$ i ho llegim com **x no pertany a A** .

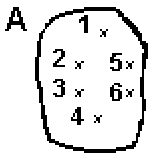
Per donar un conjunt, ho fem per extensió enumerant tots els seus elements entre claus; o per comprensió donant, també entre claus, la propietat que permet decidir quins són els seus elements (**propietat característica**); per representar gràficament els conjunts, utilitzem els **Diagrames de Venn**.

Així per exemple si volem donar el conjunt dels valors que ens poden sortir quan tirem un dau normal, ho podem fer:

per extensió $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

per comprensió $A=\{$valors de les cares d'un dau$\}$ , $A=\{$naturals entre 1 i 6$\}$, $A=\{n \in N \mid 1 \le n \le 6\}$

El seu diagrama de Venn seria

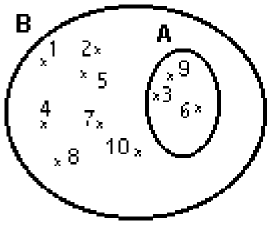



**Univers**
A vegades, considerem un conjunt genèric que estaria format per tots els elements que existeixen, d'aquest conjunt en direm univers i l'escriurem com **U**.

**Conjunt buit.**
Entendrem per conjunt buit a un conjunt que no té cap element, al conjunt buit el representem amb el símbol $\varnothing$.

**Subconjunt**
Si tenim A i B dos conjunts, diem que:
A és **subconjunt** de B o que A està **contingut** o **inclòs** en B
o que B **conté** A $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A \subset B}$ $\Leftrightarrow$ tot element de A és també element de B $\Leftrightarrow$ $\mathbf{(\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B))}$
Quan $\mathbf{A \subset B}$ també se sol dir diem que B **conté** A .

**Exemple:**
El conjunt A={3, 6, 9} = {múltiples de 3 menors que 10} és un subconjunt de B={naturals menors o iguals a 10}
està clar que A⊂B.




**Observeu que :**

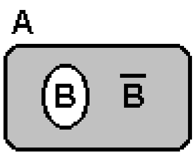
- si A(x) és la propietat característica del conjunt A i B(x) és la de B, dir que A⊂B seria equivalent a que dir que A(x)⇒B(x).

- Si existís algun element de A que no fos de B diríem que A no és subconjunt de B i ho expressaríem com **A⊄B**.

- Dos conjunts A i B són iguals ⇔ A ⊂ B i B ⊂ A ⇔ A i B tenen els mateixos elements.

Quan tenim un conjunt A i considerem tots els seus subconjunts, un nou conjunt que anomenem **parts de A** i l'expressem com **℘(A)**.
Està clar que a qualsevol conjunt A, sempre l'hi podem trobar dos subconjunts, el mateix A i el conjunt buit, amb el que {A}∈℘(A) i {∅}∈℘(A).

**Complementari**
Si B⊂A, entenem per complementari de B respecte de A i ho representem com $C_A(B)$; si no hi ha dubtes sobre el conjunt de referència simplement hi posem $\overline{B}$




**Cardinal.**
El cardinal d'un conjunt és el número d'elements que té aquest conjunt, representem el cardinal de A com |A|.

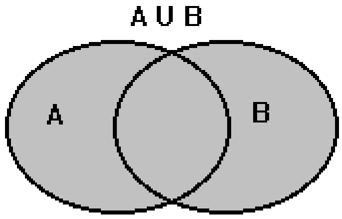
Així per A={3, 6, 9} = {múltiples de 3 menors que 10} |A|=3.

# OPERACIONS AMB CONJUNTS.

## UNIÓ.

Donats A i B, dos conjunts, anomenem **A unió B** i ho expressem com **$A \cup B$** al conjunt format pels elements de A i pels elements de B.

**$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$**




Observeu que la unió es correspon amb la o lògica .

**Exemple:**
Si A={ nombres naturals parells} i B={nombres naturals senars}
llavors $A \cup B$ = {naturals}

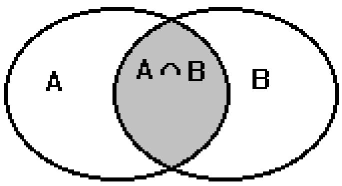
**Propietats de la unió:**

- **Associativa:**
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Commutativa:**
  $A \cup B = B \cup A$
- **Idempotència:**
  $A \cup A = A$
- **Relació amb $\varnothing$ i $\mathbf{U}$ :**
  $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ i $A \cup \varnothing = A$

## INTERSECCIÓ DE CONJUNTS.

Donats A i B, dos conjunts, anomenem **A intersecció B** i ho designem per **$A \cap B$** al conjunt format pels elements que són simultàniament de A i de B.

**$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$**




Observeu que la intersecció es correspon a la i lògica.

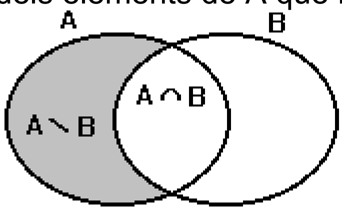
**Exemple:**
Si A={naturals múltiples de 2}=$\{n \mid \exists k \in \mathbf{N} \ \ n=2\cdot k\}$ i B={naturals múltiples de 3}=$\{n \mid \exists k \in N \ \ n=3\cdot k\}$
Com els nombres que són alhora múltiples de 2 i múltiples de 3 són els múltiples de $2\cdot 3 = 6$, tenim que
$A \cap B$={naturals múltiples de 6}

**Propietats de la intersecció:**

- **Associativa:**
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Commutativa:**
  $A \cap B = B \cap A$
- **Idempotència:**
  $A \cap A = A$
- **Relació amb $\varnothing$ i $\mathbf{U}$ :**
  $A \cap \mathbf{U} = A$ i $A \cap \varnothing = \varnothing$

## Diferència .

Si A i B són dos conjunts, anomenem **A\B** i ho llegim com **A excepte B** , al conjunt dels elements de A que no són de B..




Observis que $\mathbf{U} \setminus A = \overline{A}$

## PROPIETATS DE LA UNIÓ I LA INTERSECCIO

- **Associatives:**
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Commutatives:**
  $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
- **Idempotència:**
  $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
- **Lleis de simplificació:**
  $A \cup ( B \cap A ) = A$ i $A \cap ( B \cup A ) = A$
- **Distributives:**
  $A \cup ( B \cap C ) = ( A \cup B ) \cap ( A \cup C )$
  $A \cap ( B \cup C ) = ( A \cap B ) \cup ( A \cap C )$
- **Lleis de Morgan:**
  $\mathbf{U} \setminus (A \cup B) = (\mathbf{U} \setminus A) \cap (\mathbf{U} \setminus B)$ $\mathbf{U} \setminus (A \cap B) = (\mathbf{U} \setminus A) \cup (\mathbf{U} \setminus B)$
- **Si A i B són conjunts amb cardinal finit**
  $| A \cup B | = |A| + |B| - |A \cap B|$

## PRODUCTE CARTESSIÀ

Si tenim A i B conjunts no buits, definim el producte A x B, com un nou conjunt format pels parells ordenats on el primer element del parell és de A i el segon de B.
$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ i } b \in B\}$

**Exemple:**
Si $A=\{1, 2, 3\}$ i $B=\{x, y\}$
$A \times B=\{(1,x) , (1,y) , (2,x) , (2,y) , (3,x) , (3,y)\}$

**A x B**

| B \ A | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| x | (1,x) | (2,x) | (3,x) |
| y | (1,y) | (2,y) | (3,y) |

mentre que
$B \times A=\{(x,1) , (x,2) , (x,3) , (y,1) , (y,2) , (y,3)\}$

**B x A**

| A \ B | x | y |
|---|---|---|
| 1 | (x,1) | (y,1) |
| 2 | (x,2) | (y,2) |
| 3 | (x,3) | (y,3) |

**Propietats**

- **Distributiva respecte la intersecció:**
  $A \times ( B \cap C ) = ( A \times B ) \cap ( A \times C )$
- **Distributiva respecte la unió:**
  $A \times ( B \cup C ) = ( A \times B ) \cup ( A \times C )$
- **NO és commutatiu, en general A x B ≠ B x A:**
  Com $(a,b) \neq (b,a)$, es clar que $A \times B \neq B \times A$
- **$|A \times B| = |A| \cdot |B|$:**
  Pel que fa als cardinals, està clar que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$