# Combinatòria.

Amb la combinatòria volem donar un vocabulari i uns mètodes i tècniques que ens permetin i facilitin l'estudi i anàlisi de les diferents maneres d'agrupar objectes.

## Variacions ordinàries.

### Concepte.

Si tenim un conjunt de m elements i n un natural $n \leq m$,
anomenem **variació de m elements presos de n en n**, a cada una de les agrupacions que podem formar amb n elements dels m inicials, tenint en compte que tots son diferents (cap element es repeteix) i que dues agrupacions seran diferents quan tinguin elements diferents o quan estiguin en ordres diferents.

Les variacions de m elements presos n a n, també en diem **llistes ordenades** de n elements diferents escollits dins d'un conjunt de m elements.

### Exemple:

Donat el conjunt $\{$ a, b, c $\}$ i utilitzant diagrames d'arbre, trobem totes les variacions que podem formar d'un, dos o tres elements amb a, b i c.

**Variacions que tenen 1 element**

a .......................... **a**
b .......................... **b**
c .......................... **c**

**Variacions que tenen 2 elements**

a ⟨ b ................. **a b**
a ⟨ c ................. **a c**

b ⟨ a ................. **b a**
b ⟨ c ................. **b c**

c ⟨ a ................. **c a**
c ⟨ b ................. **c b**

**Variacions que tenen 3 elements**

a ⟨ b — c ............ **a b c**
a ⟨ c — b ............ **a c b**

b ⟨ a — c ............ **b a c**
b ⟨ c — a ............ **b c a**

c ⟨ a — b ............ **c a b**
  ⟨ b — a ............ **c b a**

Observeu que si el conjunt inicial és A={$a_1$, $a_2$, ... , $a_m$ } , podem definir com variació d'aquests m elements presos n a n, a cada una de les **aplicacions injectives** que van del conjunt {1, 2, ...n} al conjunt A, limitant-nos a dir quina posició ocupa cada element.

Per exemple, les 6 variacions que podem formar amb els elements a, b, c presos 2 a 2, les podem identificar amb les aplicacions injectives del conjunt {1,2} al conjunt {a, b, c}.

| la variació | amb l'aplicació | definida per |
|---|---|---|
| a b | $h_1$ | $h_1(1)=a$ i $h_1(2)=b$ |
| a c | $h_2$ | $h_2(1)=a$ i $h_2(2)=c$ |
| b a | $h_3$ | $h_3(1)=b$ i $h_3(2)=a$ |
| b c | $h_4$ | $h_4(1)=b$ i $h_4(2)=c$ |
| c a | $h_5$ | $h_5(1)=c$ i $h_5(2)=a$ |
| c b | $h_6$ | $h_6(1)=c$ i $h_6(2)=b$. |

**Número de variacions.**

Si tenim un conjunt de m elements i n un natural $n \leq m$, el numero de variacions de p elements que podem formar es $m\cdot(m - 1)\cdot(m - 2)\cdot..\ (m - (n - 1))$.

*ja que:*

Si hem de formar llistes de n elements, el primer element de la llista el podem escollir entre m.
Un cop fixat el primer element de la llista, el segon el podem escollir entre m-1;
fixats els dos primers elements de la llista, el tercer el podrem escollir d'entre els m-2 que ens queden;
...
i així fins a obtenir la llista amb n elements.

Representem aquest nombre amb el símbol $V_{m,\, n}$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \ldots (m - (n - 1)).$$

**Exemple:**

Una comissió de 10 persones ha d'elegir un president, un secretari i un tresorer. De quantes maneres pot fer-ho?

Observem que :

- no poden haver-hi elements repetits, el president no pot ser alhora el secretari
- seran mostres ordenades, no és el mateix ser secretari que tresorer.

Cada resultat de l'elecció és una variació ordinària i tindrem un total de $V_{10,3} = 10\cdot9\cdot8 = 720$ maneres de fer el repartiment de càrrecs.

## Permutacions ordinàries.

### Concepte.

Si tenim un conjunt de n elements anomenem **permutació d'aquest n elements,** a cada una de les agrupacions que podem formar amb tots ells, tenint en compte que dues agrupacions són diferents quan tenen ordres diferents.
De fet, les permutacions de n elements, són variacions de n presos tots alhora.

Observeu que si el conjunt inicial és $A=\{a_1, a_2, \dots , a_n\}$ podem definir com a permutació d'aquests n elements a cada una de les aplicacions bijectives del conjunt $\{1, 2, \dots n\}$ al conjunt A.

### Número de permutacions.

Com les permutacions de n elements són llistes ordenades de n elements, tindrem que el número de permutacions ordinàries que podem formar amb n elements serà $P_n = V_{n,n} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-(n-1)) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1$ , valor que acostumem a expressar com **n!** i a dir-ne **n factorial** .

### Exemples:

- Trobem els números de tres xifres es poden formar amb els dígits 1, 2 i 3 , sense que es repeteixi cap dígit.

  Per trobar tots , utilitzarem un diagrama d'arbre.

  Comencen amb 1

  $$\mathbf{1}\left\langle\begin{array}{l} 2 - 3 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{1\,2\,3} \\ 3 - 2 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{1\,3\,2} \end{array}\right.$$

  Comencen amb 2

  $$\mathbf{2}\left\langle\begin{array}{l} 1 - 3 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{2\,1\,3} \\ 3 - 1 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{2\,3\,1} \end{array}\right.$$

  Comencen amb 3

  $$\mathbf{3}\left\langle\begin{array}{l} 1 - 2 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{3\,1\,2} \\ 2 - 1 \;\dots\dots\dots\dots\; \mathbf{3\,2\,1} \end{array}\right.$$

- De quantes maneres poden seure 8 persones en un banc?

  Està clar que totes les persones han de seure i que l'ordre en que seguin serà el que determinarà si seuen diferent o no; tenim doncs que cada manera de seure és una permutació.
  Com $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 40 320 formes diferents.

- En un prestatge hi ha 15 llibres diferents, de quantes maneres es poden ordenar?

  $P_{15} = 15! = 15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 1_2307\ 674_1368\ 000.$

- Trobem quants números de 5 xifres es poden formar amb els dígits 1, 2 , 3, 4 i 5, sense que se'n repeteixi cap.
  Quants comencen per 3 i acaben amb 2?

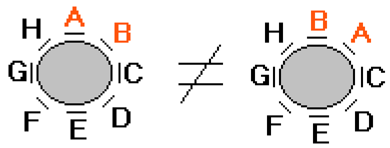
  És obvi que el cadascun dels números buscats, és una permutació de 5 elements; per tant podrem formar $P_5 = 5! = 120$ números diferents.
  Comptem ara quants comencen amb 3 i acaben amb 2.
  Quan fixem el dígit **3** a la posició 1 i el dígit **2** a la posició 5,

| **número** | **3** | ___ | ___ | ___ | **2** |
|---|---|---|---|---|---|
| posició | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

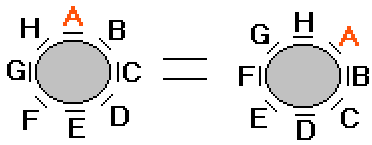
  ens queden tres posicions per determinar i tres dígits on escollir.
  Per tant hi ha $P_3=3! = 6$ números que comencen per 3 i acaben amb 2.

- De quantes maneres poden seure 8 persones en una taula rodona?

  Està clar que han de seure tots 8 i l'ordre en que seguin és important,




  però que sols podem parlar d'ordre quan n'hi ha un d'assegut.




  El número de maneres com poden seure 8 persones a una taula rodona, serà doncs el número de permutacions de 7 elements = $P_7=7!= 5040$ .

## Combinacions ordinàries.

### Concepte.

Si tenim A un conjunt de m elements i n un natural $n \le m$,
anomenem **combinació de m elements presos de n en n**, a cada una de les agrupacions que podem formar amb n elements dels m inicials, tenint en compte que tots son diferents (cap element es repeteix) i que dues agrupacions són diferents quan tenen elements diferents.

Les combinacions de m elements presos n a n, són llistes no ordenades de n elements diferents escollits d'entre m elements.

Observeu que si el conjunt inicial és $A=\{a_1, a_2, \dots , a_m\}$ podem definir com a combinació d'aquests m elements presos de n en n, a cada un del subconjunts de A que tenen n elements.

**Exemples:**

- Trobem les combinacions de 2 elements que podem formar amb els elements dels conjunt $\{a, b, c\}$.

$$a \left\langle \begin{array}{lll} b & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a\ b} \\ c & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a\ c} \end{array} \right.$$

$$b \left\langle \begin{array}{lll} a & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{b a (és el mateix que el a b)} \\ c & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{b\ c} \end{array} \right.$$

$$c \left\langle \begin{array}{lll} a & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{c a (és el mateix que el a c)} \\ b & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{c b (és el mateix que el b c)} \end{array} \right.$$

Per tant podem formar el {a,b}, {a,c}, {b,c }.

- Amb quatre monedes diferents de valors respectius 1€, 0.50€, 0.10€ i 0.05€, quines quantitats podem pagar amb exactament tres d'aquestes monedes?

Les combinacions de monedes que podem fer són:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1€, 0.50€, 0.10€** | **1€, 0.50€, 0.05€** | **1€, 0.10€, 0.05€** | **0.50€, 0.10€, 0.05€** |
| *1€, 0.10€, 0.50€* | *1€, 0.05€, 0.50€* | *1€, 0.05€, 0.10€* | *0.50€, 0.05€, 0.10€* |
| *0.50€, 1€, 0.10€* | *0.50€, 1€, 0.05€* | *0.10€, 1€, 0.05€* | *0.10€, 0.50€, 0.05€* |
| *0.50€, 0.10€, 1€* | *0.50€, 0.05€, 1€* | *0.10€, 0.05€, 1€* | *0.10€, 0.05€, 0.50€* |
| *0.10€, 1€, 0.50€* | *0.05€, 1€, 0.50€* | *0.05€, 1€, 0.10€* | *0.05€, 0.50€, 0.10€* |
| *0.10€, 0.50€, 1€* | *0.05€, 0.50€, 1€* | *0.05€, 0.10€, 1€* | *0.05€, 0.10€, 0.50€* |

I per tant, amb exactament 3 d'aquestes monedes, podem pagar les quantitats de :

**1.60€** **1.55€** **1.15€** **0.65€**

**Número de combinacions.**

Si tenim un conjunt A amb m elements i n≤m, del número de combinacions de m elements presos de n en n que podem formar, en diem **nombre combinatori** o **binomial**, i el representem com $C_{m,n}$ o com $\binom{m}{n}$ que es llegeix **m sobre n**.

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \quad .$$

**Exemple:**

- Quantes combinacions de 2 elements que podem formar amb els elements dels conjunt $\{a, b, c\}$.

  A un exemple anterior, hem vist que hi ha 3 opcions; {a,b}, {a,c} i {b,c} . Calculem, sense trobar-les, quantes n'hi ha.

  Amb 3 elements presos 2 a 2 podem formar $\binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ combinacions.

## Coeficients binomials.

### Propietats:

- Si m i n són enters amb $0 \le n \le m$, aleshores $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$ .

  *Ja que:*
  Quan m < n tenim que:
  $$\binom{m}{n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!}.$$

  multiplicant i dividim per (m-n)! , obtenim:
  $$\binom{m}{n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))\cdot(m-n)!}{n!\cdot(m-n)!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$$

  Adoptant el criteri 0!=1, podem generalitzar l'expressió al valor m=n .

- Si m, n enters $0 \le n \le m \Rightarrow \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ .

  *ja que*:
  $$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot(m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

- Si m, n enters $0 \le n \le m \Rightarrow \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$.

  *Ja que:*
  $$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-1-(n-1))!} + \frac{(m-1)!}{n!\cdot(m-1-n)!} =$$

  Operant:
  $$= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-1-n+1)!} + \frac{(m-1)!}{n!\cdot(m-1-n)!} =$$

  Multiplicant i dividint el primer terme per n i el segon sumand per m-n, obtenim
  $$= \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(n-1)!\cdot(m-n)!} + \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{n!\cdot(m-n)\cdot(m-1-n)!} =$$

  $$= \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot!\cdot(m-n)!} + \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{n!\cdot(m-n)!} =$$

  Fent la suma
  $$= \frac{n\cdot(m-1)! + (m-n)\cdot(m-1)!}{n\cdot!\cdot(m-n)!} =$$

Com (m-1)! és factor comú

$$= \frac{(m-1)!\cdot(n+(m-n))}{n\cdot!\cdot(m-n)!} = \frac{(m-1)!\cdot m}{n\cdot!\cdot(m-n)!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{n} .$$

**Exemples:**

- Quantes diagonals té un polígon convex de 7 costats?

  Observem que:
  - un polígon de 7 costats té 7 vèrtexs.
  - les diagonals són rectes que uneixen dos vèrtexs diferents i no són costats.
  - la diagonal que va d'un vèrtex a un altre, és la mateixa que la diagonal que va del segon vèrtex al primer.

  El número de diagonals que podem formar és doncs $\binom{7}{2} - 7 = 21 - 7 = 14$.

- Els alumnes d'una matèria són 10 nois i 15 noies; per tal de fixar amb el professor la data de l'examen, volen formar una comissió de 4 alumnes . Quantes comissions diferents es poden formar?
  Quantes comissions diferents hi poden haver que estiguin formades per dues noies i dos nois?

  Està clar que a una comissió no hi poden haver alumnes repetits.
  Si a la comissió tots quatre tenen el mateix rang, l'ordre en que els escollim no importa.
  Cada comissió serà doncs una combinació de 4 elements entre els 10 + 15 = 25 alumnes.
  El número de comissions possibles serà :

  $$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!\cdot 21!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 21!} = 25\cdot 23\cdot 22 = 12\,650 .$$

  Comptem ara quantes comissions hi de dues noies i dos nois.
  Les comissions que podem formar de dues noies són:

  $$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13!}{2\cdot 13!} = 15\cdot 7 = 105 ,$$

  Per cada una de les agrupacions de dues noies concretes, hi hauran

  $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 8!} = 5\cdot 9 = 45$ combinacions de dos nois;

  amb el que hi ha un total de 105 ·45 = 4 725 comissions formades per dues noies i dos nois.

## Variacions amb repetició.

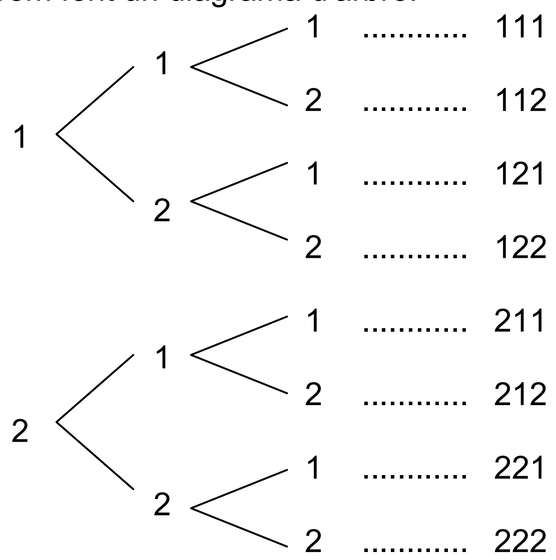
### Concepte

Si tenim A un conjunt de m elements i n un natural $n \leq m$,
anomenem **variació amb repetició dels m elements presos n a n**, a cada una de les agrupacions que podem formar amb n elements dels m inicials, tenint en compte que dues agrupacions són diferents quan tenen elements diferents o quan estan en ordres diferents.

### Exemple:

Quins números de tres xifres podem formar amb els dígits 1 i 2?

Els trobarem fent un diagrama d'arbre:




### Número de variacions amb repetició.

Si el conjunt A té m elements, podem formar $m^n$ variacions amb repetició dels m elements presos n a n, i aquest nombre el representem amb el símbol $VR_{m,n}$.
*ja que:*

El primer element de la llista el podem escollir entre m;
un cop fixat el primer element de la llista, el segon també el podem escollir entre m (al poder-se repetir, pot tornar a ser el mateix que abans);
fixats els dos primers elements, el tercer el podrem escollir entre m;
...
i així fins a obtenir la llista amb n elements.
Amb el que $VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$ .

### Exemple:

Quants números de tres xifres podem formar amb els dígits 1 i 2?

Observem que :

- poden haver-hi elements repetits
- seran mostres ordenades (no és el mateix 112 que 211).

Amb el que cada número serà una variació amb repetició de 2 elements presos de 3 en 3.

Per tant podem formar $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ números.

Observeu que si el conjunt inicial és $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ podem definir com a variació d'aquests m elements presos de n en n, a cada una de les **aplicacions** del conjunt {1, 2, ...n} al conjunt A.

## Permutacions amb repetició.

### Concepte

Si tenim un conjunt A amb n elements, que es repeteixen un nombre determinat de vegades $n_1, n_2, \dots, n_r$ .
Anomenem permutació amb repetició de n elements repetint-se $n_1+n_2+..+n_r = n$, a les agrupacions que podem formar amb tots ells tenint en compte que dues agrupacions són diferents quan l'ordre dels elements és diferent.

**Exemple:**

Tenim tres jocs d'ordinador, de noms $C_1$, $C_2$ i D .
Els $C_1$ i $C_2$ son en format CD i mentre que el D és en format DVD.
De quines maneres podem ordenar-los segons el format?

En primer lloc fem un diagrama d'arbre i obtenim les permutacions de $C_1$, $C_2$ i D, després ens fixem quin format té cada permutació.

| | | | permutació | format |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | $C_2$ | D | $C_1$ $C_2$ D | C C D |
| | D | $C_2$ | $C_1$ D $C_2$ | C D C |
| $C_2$ | $C_1$ | D | $C_2$ $C_1$ D | C C D |
| | D | $C_1$ | $C_2$ D $C_1$ | C D C |
| D | $C_1$ | $C_2$ | D $C_1$ $C_2$ | D C C |
| | $C_2$ | $C_1$ | D $C_2$ $C_1$ | D C C |

Veiem que, si sols ens fixem en el format, podem ordenar els tres jocs de tres maneres la C C D , la C D C i la D C C .

**Número de permutacions amb repetició.**

El número de permutacions amb repetició de n elements repetint-se $n_1, n_2, .., n_r$ vegades que podem formar, és $PR_n^r = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$ .

A l'exemple anterior eren tres elements repetint-se dues i una vegada, per tant el número de d'ordenacions que podem formar és: $PR_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ .