anàlisi de funcions

3 integral indefinida

CONCEPTE DE PRIMITIVA.

Donades les funcions $f:[a,b] \longrightarrow R$ i $F:[a,b] \longrightarrow R$

$x \longrightarrow f(x)$ $x \longrightarrow F(x)$

diem que F és una **primitiva o anti-derivada** de f $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [a,b]$ $dF = f(x)\,dx$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ F és derivable a totes les x de [a,b] i $F'(x) = f(x)$.

PROPIETATS.

Siguin $f:[a,b] \longrightarrow R$ i $F:[a,b] \longrightarrow R$
F primitiva de f $\Rightarrow$ per a tot $C \in R$ F+C és primitiva de f.

És a dir :
Si a una primitiva li sumem una constant, el resultat és una altra primitiva.

Demostració:
F primitiva de f $\Rightarrow$ $dF = f(x)\,dx$.
Com $d(F+C) = dF + dC = dF + 0 = dF = f(x)\,dx \Rightarrow$ F+C primitiva de f.

Sigui $f : [a,b] \longrightarrow R$
F i G són dues primitives de f $\Rightarrow$ F=G+C amb C constant.

És a dir:
Dues primitives d'una mateixa funció, són iguals excepte en una constant additiva.

Demostració:
F primitiva de f $\Rightarrow$ F derivable a [a,b] i $F'(x) = f(x)$
G primitiva de f $\Rightarrow$ G derivable a [a,b] i $G'(x) = f(x)$

Per a tot x, considerem el quocient $\dfrac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)}$

Pel teorema de Cauchy existeix $c \in (x,b)$ de manera que

$$\frac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)}{f(c)} = 1 \Rightarrow F(b) - F(x) = G(b) - G(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + F(b) - G(b) = G(x) + C .$$

CONCEPTE D' INTEGRAL INDEFINIDA.

Per les propietats anteriors podem afirmar que donada la funció $f:[a,b] \longrightarrow R$

- si a una primitiva li sumem una constant, obtenim una altra primitiva.
- si tenim dues primitives, aquestes són iguals excepte en una constant additiva.

Així doncs, el conjunt de totes les primitives de f, es pot obtenir a partir d'una primitiva concreta F, sumant-li diferents constants en la forma: F(x) + C.

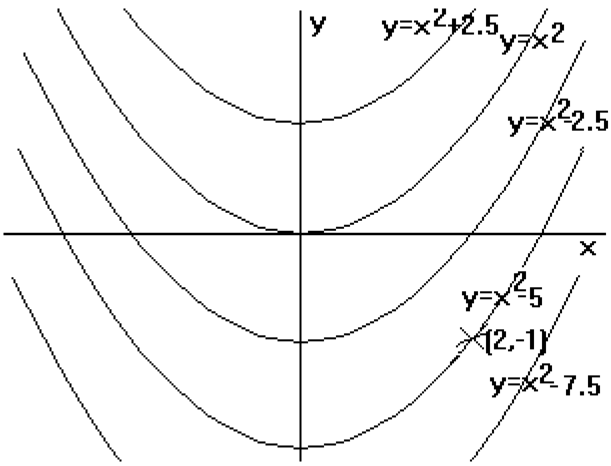
Per aquesta raó, definim la **integral indefinida** o simplement la **integral** de la funció f, com: **el conjunt de totes les primitives de f** , i ho representem de en la forma :

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad \text{on F és una primitiva de f.}$$

Observis que: sumar una constant C a una funció, és desplaçar verticalment el seu gràfic tantes unitats com indica la C. Així la constant d'integració ens desplaça verticalment una primitiva concreta. Per aquesta raó, ens podem plantejar d'aquesta manera els **problemes de valor inicial**, en el que se'ns dona una funció i cal trobar-li una primitiva que passi per un punt concret (x_0,y_0).

Exemple :
Donada la funció f(x)= 2x , trobeu la primitiva que passa per (2,-1).
En primer lloc trobem totes de primitives de f(x); són: $F(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C$.

Si passa per (2,-1) $\Rightarrow F(2) = -1$,
però $F(2) = 2^2 + C = 4 + C$.
Per tant $4 + C = -1 \Rightarrow C = -5$.
La primitiva buscada és $F(x) = x^2 - 5$.



PROPIETATS:

$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

Ja que: Si $F'(x) = f(x) \Rightarrow d\,F(x) = f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx = \int d\,F(x)$

però, per definició, $\int f(x)\, dx = F(x) + C \Rightarrow \int d\,F(x) = F(x) + C$.

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx$$

Ja que: Si $F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$
diferenciant aquesta igualtat

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = dF(x) + 0 = f(x)\, dx.$$

$$\int (f+g)(x)\ dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\ .$$

És a dir:

La integral d'una suma és la suma de les integrals.

Ja que:

$$d\int (f+g)(x)\ dx = (f+g)(x)dx = f(x)\ dx + g(x)dx = d\int f(x)dx + d\int g(x)dx =$$

$$= d\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right) \Rightarrow \int (f+g)(x)\ dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\ .$$

$$\int k\ f(x)dx = k\int f(x)\ dx\ .$$

És a dir:

La integral d'una constant per una funció és la constant per la integral de la funció.

Ja que:

$$d\int k\ f(x)dx = (k\ f(x))dx = k\ (f(x)dx) = k\ d\int f(x)dx = d\left(k\int f(x)\ dx\right) \Rightarrow$$

$$\int k\ f(x)dx = k\int f(x)\ dx.$$

TAULA D'INTEGRALS IMMEDIATES.

Com a conseqüència de la definició d'integral, per obtenir una taula d'integrals immediates, sols ens cal "girar" la taula de derivades; així podem afirmar que:

$$\int (du_1 + du_2 + .. + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + .. + \int du_n$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{per tot } n \neq -1$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C = a^u \log_a e + C$$

$$\int \sin u\ du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\ du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \sec u \operatorname{tg} u\ du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u\ du = \ln|\sec u| + C = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sin} u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} u + C$$

$$\int k du = k\int du$$

$$\int u^{-1}\ du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u\ du = e^u + C$$

$$\int \cos u\ du = \sin u + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u\ du = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u\ du = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$\int \operatorname{ctg} u\ du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \operatorname{cosec} u\ du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u| + C = \ln|\operatorname{tg} u/2| + C$$

$$\int \frac{-du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,ctg} u + C$$

$$\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,cos} u + C$$

$$\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc\,cosec} u + C$$

MÈTODES D'INTEGRACIÓ.

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ.

El mètode de **substitució** o **canvi de variables** és, i de bon tros, el més emprat de tots, car s'utilitza pràcticament a la totalitat de les integrals no immediates. Es basa en el següent:

TEOREMA.

Si f és contínua i g és derivable amb continuïtat $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \qquad \text{on } g(x) = t\,.$$

Ja que:

Si F és una primitiva de f per la regla de la cadena, tenim:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (F \circ g)'(x)dx = (F \circ g)(x) = F(g(x))+C\,.$$

Si anomenem g(x) = t, tenim

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C = F(t) + C$$

I com F és primitiva de f $\quad\Rightarrow \int f(t)\, dt = F(t) + C$

Per tant

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \qquad \text{on } g(x) = t$$

Exemple:

- Càlcul de $\displaystyle\int \frac{2\, dx}{3x+5}$

  Si fem $3x + 5 = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = 1/3\ dt \Rightarrow$

$$\int \frac{2\, dx}{3x+5} = \int \frac{2/3\ dt}{t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{2}{3}\ln t + C = \frac{2}{3}\ln|\,3x+5\,| + C.$$

- Càlcul de $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

  Si fem $\ln x = t \Rightarrow \dfrac{1}{x}\, dx = dt \quad \Rightarrow$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C\,.$$

MÈTODE D'INTEGRACIÓ PER PARTS.

La fórmula d'integració per parts s'acostuma a utilitzar per calcular integrals de productes, logaritmes i funcions circulars inverses.

TEOREMA.

Si u i v són dues funcions derivables amb derivada contínua

$$\Rightarrow \int u\,dv = u\,v - \int v\,du .$$

Ja que:

Si considerem la diferencial d'un producte $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$

$$\Rightarrow \quad u\,dv = d(u\,v) - v\,du .$$

Integrant els dos membre de la igualtat

$$\int u\,dv = \int (d(uv) - v\,du) = \int d(uv) - \int v\,du = u\,v - \int v\,du .$$

Exemples:

- Càlcul de $\int x \sin x\,dx$

  Prenent

  $$dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

  $$u = x \Rightarrow du = dx$$

  substituint: $$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C .$$

- Càlcul de $\int \text{arc tg}\,x\,dx$.

  Prenent

  $$dv = dx \quad \Rightarrow v = x$$

  $$\text{i} \quad u = \text{arc tg}\,x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

  $$\int \text{arc tg}\,x\,dx = x\,\text{arc tg}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

  Calculem ara

  $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}, \text{ fent } t=1+x^2 \Rightarrow dt=2x\,dx \Rightarrow \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

  amb el que, substituint, $$\int \text{arc tg}\,x\,dx = x\,\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

ALGUNES INTEGRALS TRIGONOMÈTRIQUES.

Sovint trobem integrals on totes les funcions que hi apareixen són funcions trigonomètriques; per resoldre-les caldrà fer ús d'algunes de les fórmules de trigonometria estudiades en cursos anteriors. No veurem de forma detallada i exhaustiva tota la tipologia d'aquestes integrals, sols mostrarem alguns dels casos més interessants.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ **amb m,n enters.**

- **Si m o n imparell**

  Exemple:

  $$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx =$$

  com $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

  $$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin dx$$

  fent el canvi $\cos x = t \Rightarrow -\sin x \, dx = dt$, obtenim

  $$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int -(1-t^2)^2 t^2 \, dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) \, dt =$$

  $$= \frac{-t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C .$$

- **Si m i n són parells i diferents**, es redueixen els exponents aplicant les fórmules:

  $$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

  Exemple:

  $$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

- **Si m = n i parells**, s'acostumen a reduir els exponents utilitzant la fórmula del $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; transformant així la integral en una del tipus anterior.

  Exemple:

  $$\int (\sin x \cos x)^2 \, dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx =$$

  i com $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

  $$= \int \frac{1 - \cos 4x}{8} dx = \frac{1}{8} x - \frac{\sin 4x}{32} + C .$$

Les integrals en la forma:

$$\int \textbf{sin mx cos nx dx} \quad , \int \textbf{sin mx sin nx dx} \quad \textbf{o} \int \textbf{cos mx cos nx dx} \quad \textbf{amb} \quad \mathbf{m \neq n} \ .$$

Recordem que : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

i que: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

sumant terme a terme, obtenim $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

Si ara fem $\alpha = mx$ i $\beta = nx$, ens queda:

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x \right) dx .$$

que és una integral quasi-immediata.

Per a les altres dues, cal tenir en compte que: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ i $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

sumant terme a terme obtenim $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

Fent $\alpha = mx$ i $\beta = nx$, ens queda:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right) dx .$$

Si en lloc de sumar, restem , obtenim: $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$.

I per tant:

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right) dx.$$

Exemple:

$$\int \sin 5x \sin 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C .$$

Integrals del tipus

$$\int \textbf{tg}^{\mathbf{n}}\textbf{x dx} \quad \textbf{o} \quad \int \textbf{ctg}^{\mathbf{n}}\textbf{x dx} \qquad \textbf{amb n enter.}$$

Pel cas $n=1$ són immediates.

Si $n \neq 1$, com $1 + tg^2x = sec^2x \Rightarrow sec^2x - 1 = tg^2x$, tenim que:

$$\int tg^n x\, dx = \int tg^{n-2}x\, tg^2x\, dx = \int tg^{n-2}x\,(sec^2x - 1)dx = \int tg^{n-2}x\, sec^2x\, dx - \int tg^{n-2}x\, dx$$

realitzant el canvi $tg\, x = t \Rightarrow dt = sec^2x\, dx$

$$= \int t^{n-2}\, dt - \int tg^{n-2}x\, dx = \frac{1}{n-1} t^{n-1} - \int tg^{n-2}x\, dx = \frac{1}{n-1} tg^{n-1}x - \int tg^{n-2}x\, dx .$$

Aplicant aquest procediment el nombre de vegades necessari, podrem resoldre l'integral.
De fet, del procediment anterior s'obté la següent fórmula recurrent:

$$\text{Si} \quad I_k = \int tg^k x \, dx \Rightarrow I_k = \frac{1}{k-1} tg^{k-1}x - I_{k-2} .$$

Exemple:

$$\int tg^6 x \, dx = \int tg^4 x \; tg^2 x \, dx = \int tg^4 x(sec^2 x - 1)dx = \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^4 x \, dx =$$

$$= \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^2 x \; tg^2 x \, dx = \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^2 x(sec^2 x - 1)dx =$$

$$= \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^2 x \; sec^2 x \, dx + \int tg^2 x \, dx =$$

$$= \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^2 x \; sec^2 x \, dx + \int (sec^2 x - 1)dx =$$

$$= \int tg^4 x \; sec^2 x \, dx - \int tg^2 x \; sec^2 x \, dx + \int sec^2 x \, dx - \int dx =$$

si ara fem $t = tg\, x \Rightarrow dt = sec^2 x \, dx$

$$= \int t^4 dt - \int t^2 dt + \int dt - \int dx = t^5/5 - t^3/3 + t - x =$$

$$= \frac{tg^5 x}{5} - \frac{tg^3 x}{3} + tg\, x - x + C .$$

Integrals en la forma:

$$\int tg^m x \; sec^n x \, dx \quad \text{o} \quad \int ctg^m x \; csc^n x \, dx \quad \text{amb } m \text{ i } n \text{ enters.}$$

- **Si n és parell** fem $sec^n x = sec^{n-2} x \; sec^2 x$, amb el que:
  $sec^n x = (sec^2 x)^{(n-2)/2} sec^2 x = (1+tg^2 x)^{(n-2)/2} sec^2 x$.
  Fent el canvi $t = tg\, x$, podrem resoldre la integral.

  Exemple:

$$\int tg^3 x \; sec^6 x \, dx = \int tg^3 x \; sec^4 x \; sec^2 x \, dx = \int tg^3 x \; (sec^2 x)^2 \; sec^2 x \, dx =$$

$$= \int tg^3 x \; (1+tg^2 x)^2 \; sec^2 x \, dx =$$

fent $tg\, x = t \Rightarrow dt = sec^2 x \, dx$

$$= \int t^3 (1+t^2)^2 \, dt = \int (t^3 + 2t^5 + t^7) \, dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8} = \frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^6 x}{3} + \frac{tg^8 x}{8} + C .$$

- **Si n és senars** , s'acostuma a resoldre per parts o com a l'exemple:

$$\int tg^5x \sec x\, dx = \int tg^4x \sec x\, tg\, x\, dx = \int (tg^2x)^2 \sec x\, tg\, x\, dx =$$

$$= \int \left(\sec^2x - 1 \right)^2 \sec x\, tg\, x\, dx =$$

Fent $t = \sec x \Rightarrow dt = \sec x\, tg\, x\, dx$

$$= \int (t^2-1)^2\, dt = \int (t^4-2t^2+1)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t =$$

$$= \frac{\sec^5x}{5} - \frac{2\sec^3x}{3} + \sec x + C .$$

ALGUNES INTEGRALS AMB ARRELS.

Integrals amb $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Fent el canvi $u = a \sin t$, es transformen en una integral trigonomètrica.

Exemple:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx =$$

Si fem $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$ i

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2t} = 2\sqrt{1 - \sin^2t} = 2\sqrt{\cos^2t} = 2\cos t$$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int 2\cos t\, 2\cos t\, dt = 4 \int \cos^2t\, dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= 2\int (1+\cos 2t)dt = 2t + \sin 2t = 2t + 2\sin t \cos t =$$

i desfent el canvi:

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2\, \frac{x}{2}\, \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C .$$

Les integrals amb $\sqrt{a^2 + u^2}$, es transformen en trigonomètriques fent $u = a\, tg\, t$.

I passa el mateix amb $\sqrt{u^2 - a^2}$ quan fem $u = a \sec t$.

INTEGRALS DE FUNCIONS RACIONALS.

DEFINICIONS I CONSIDERACIONS PRÈVIES.

Anomenem **funció racional** a qualsevol quocient de polinomis $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

A l'hora estudiar una funció racional , sempre podem suposar que compleix les següents condicions:

- **P(x) i Q(x) no tenen cap factor comú.**
  Si en tinguessin factors comuns, els podríem simplificar.

- **grau P < grau Q** .
  Si grau P >= grau Q , fent la divisió entera obtenim:
  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{polinomi quocient} + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{i grau } R < \text{grau } Q.$$

Sovint afegim una tercera condició no imprescindible, però que facilita alguns càlculs. Aquesta tercera condició consisteix en suposar que el coeficient de major grau del denominador és 1.

Recordem el **principi d'identitat dels polinomis:**
dos polinomis són iguals ⇔ tenen els mateixos coeficients.

Per **fracció simple** entendrem les fraccions que tenen la forma:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \quad \text{o} \quad \frac{A\,x + B}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n}$$

on A, B són reals , n és natural i $x^2+\beta x+\gamma$ no descompon.

El mètode que veurem, es basa en expressar la funció racional, en una suma de fraccions simples; per això ens resulta imprescindible el saber calcular la integral de les fraccions simples .

INTEGRALS DE FRACCIONS SIMPLES:

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C .$$

doncs prenent $x - \alpha = u \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = \int \frac{A\,du}{u} = A \ln|u| = A \ln|x-\alpha| + C .$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^r} = \frac{1}{1-r}\,\frac{A}{(x-\alpha)^{r-1}} + C \quad \textbf{amb } r \neq 1 .$$

doncs prenent $x - \alpha = u \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^r} = \int \frac{A\,du}{u^r} = \frac{1}{1-r}\,\frac{A}{u^{r-1}} = \frac{1}{1-r}\,\frac{A}{(x-\alpha)^{r-1}} + C .$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \textbf{suma d'un ln més un arc tg} .$$

on $x^2 + \beta x + \gamma$ no descomposa.

Observem que $x^2 + \beta x + \gamma = (x + \beta/2)^2 + (\gamma - \beta^2/4)$,

anomenant $p^2 = \gamma - \beta^2/4$ i $u = x + \beta/2$, la integral es transforma en:

$$\int \frac{A\,u\,du}{u^2+p^2} + \int \frac{-A\gamma/2 + B}{u^2+p^2}\,du .$$

Resolem-les per separat:

- la primera: fem $u^2 + p^2 = t \Rightarrow dt = 2\,u\,du$

$$\int \frac{A\,u\,du}{u^2+p^2} = \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{A}{2} \ln|x^2 + \beta x + \gamma| .$$

- la segona: anomenem $C = -A\gamma/2 + B$, la notació és més simple,dividint numerador i denominador per p^2 i fent el canvi

$$\frac{u}{p} = t \Rightarrow dt = \frac{du}{p},$$

obtenim successivament:

$$\int \frac{-A\gamma/2 + B}{u^2 + p^2}\,du = \int \frac{C\,du}{u^2 + p^2} = \int \frac{C/p^2\;du}{(u/p)^2 + 1} = \int \frac{C/p^2}{t^2 + 1}\,p\,dt =$$

$$= \frac{C}{p}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{C}{p}\,\text{arc tg }t = \frac{C}{p}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{p} =$$

$$= \frac{-A\gamma/2 + B}{p}\,\text{arc tg}\,\frac{x + \beta/2}{p} + C \quad \text{on } p = \sqrt{\gamma - \beta^2/4}\ .$$

Exemple:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) - \text{arc tg}\,(x + 1) + C\,.$$

$$\text{Com } x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \Rightarrow \text{ no té sol. real} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 2$ no descomposa.

Ara bé : $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ i fent $x + 1 = u \Rightarrow dx=du$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 +2x+2} = \int \frac{u-1}{u^2 + 1}\,du = \int \frac{u\,du}{u^2 + 1} - \int \frac{du}{u^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \text{arc tg }u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) - \text{arc tg}(x+1) + C\,.$$

$$\boldsymbol{\int \frac{Ax + B}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}\,dx \quad \text{on} \quad x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{no descomposa.}}$$

Utilitzant el procés anterior, la podem expressar com

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2 + p^2)^s}\,du = \int \frac{Cu\,du}{(u^2 + p^2)^s} + \int \frac{D\,du}{(u^2 + p^2)^s}$$

La primera de les quals és una integral del tipus potencial, mentre que la segona es pot calcular mitjançant la següent fórmula de reducció:

$$\int \frac{du}{(u^2 + p^2)^s} = \frac{1}{2(s-1)p^2}\left(\frac{u}{(u^2+p^2)^{s-1}} + (2s - 3)\int \frac{du}{(u^2+p^2)^{s-1}} \right)$$

la demostració de la qual, sobrepassa els objectius del curs.

INTEGRAL DE FUNCIONS RACIONALS.

La integral d'una funció racional sempre és una suma de funcions racionals, logaritmes i arc tg .

Donada $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ no simplificable i amb grau P<grau Q descomposem el denominador en factors primers:

$$Q(x) = K\,(x-\alpha_1)^{r1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{rk}\cdot\,(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s1}\cdot(x^2+\beta_2 x+\text{Ù}_2)^{s2}\,.$$

Distingim els 4 casos següents:

El denominador descomposa en factors de primer grau simples.

$$Q(x)= K\,(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k).$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen associant a cada factor de primer grau $(x-\alpha_i)$ una fracció simple amb denominador aquest factor $\dfrac{A_i}{x-\alpha_i}$.

Així $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{x-\alpha_i}$ amb $A_i\in R$.

Per determinar els coeficients A_i, n'hi ha prou a realitzar la suma de les fraccions simples, observar que els denominadors coincideixen i, per tant, els numeradors també seran iguals.
Apliquem després el principi d'identitat dels polinomis, o donem k valors diferents a la x, i obtindrem un sistema de k equacions amb k incògnites.
Resolent-lo, obtenim els valors de les A_i.

Un cop conegudes les A_i, la integral ens queda en la forma:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{1}{K}\int\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{x-\alpha_i}\,dx=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\int\frac{A_i}{x-\alpha_i}\,dx=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i\ln|x-\alpha_i|}{K}+C$$

Exemple: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}$.

El denominador descomposa en $x^2-1=(x-1)\,(x+1)$, per tant

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\text{ , fent la suma : }\frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Com els denominadors són iguals, els numeradors també ho són $\Rightarrow$
$1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow 1 = (A+B)x + (A-B)$

Pel principi d'identitat dels polinomis, els coeficients del mateix grau són iguals

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = A - B & \text{(coef de grau 0)} \\ 0 = A + B & \text{(coef de grau 1)} \end{cases}$$

Resolent el sistema $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{-1}{2}$.

I substituint a la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{-1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + C$$

2. El denominador descomposa en factors de primer grau algun dels quals és múltiple:

$$Q(x) = K(x-\alpha_1)^{r1}\cdot(x-\alpha_2)^{r2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{rk}.$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar, a cada factor de primer grau $(x-\alpha_i)$ amb multiplicitat r_i, les r_i fraccions simples:

$$(x-\alpha_i)^{ri} \longrightarrow \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + \ldots + \frac{A_0}{x-\alpha_i}$$

i així:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + \ldots + \frac{A_0}{x-\alpha_i}$$

Si realitzem aquesta suma, tindrem que els denominadors coincidiran, i per tant numeradors també seran iguals.
Aplicant després el principi d'identitat dels polinomis, o donant diferents valors a x, obtindrem un sistema d'equacions.
Resolent-lo, obtindrem els valors de les A_{ri}.

I un cop conegudes les A_{ri}, la integral serà:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k} \int \left(\frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + \ldots + \frac{A_0}{x-\alpha_i} \right) dx =$$

$= \sum$ fraccions simples i ln .

Exemple:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C\,.$$

doncs:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} \Rightarrow$$

operant

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx + C\,x(x-1) + D\,x(x-1)^2}{x\,(x-1)^3}$$

com els denominadors són iguals $\Rightarrow$ numeradors iguals $\Rightarrow$

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + B\,x + C\,x(x-1) + D\,x(x-1)^2\,.$$

Donant diferents valors a la x $\Rightarrow$

per $x = 0 \Rightarrow\ 1 = -A$
per $x = 1 \Rightarrow\ 2 = B$
per $x = 2 \Rightarrow\ 9 = A + 2B + 2C + 2D$
per $x = -1 \Rightarrow\ 0 = -8A - B + 2C - 4D$

i resolent el sistema $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$.

Ens queda que:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^3}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2\,dx}{x-1} =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C\,.$$

3. El denominador descompon en factors de primer grau algun dels quals és múltiple i en factors simples de segon grau:

$$Q(x) = K\,(x-\alpha_1)^{r1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{rk}\cdot(x^2+ß_1x+\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(x^2+ß_mx+\gamma_m).$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar a cada factor de primer grau repetit r vegades:

$$(x-\alpha_i)^{ri} \longrightarrow \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + \ldots + \frac{A_0}{x-\alpha_i}$$

i a cada factor de segon grau

$$x^2 + \beta_i x + \gamma_i \longrightarrow \frac{B_i x + C_i}{x^2 + \beta_i x + \gamma_i}$$

Per tant:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + . + \frac{A_0}{x-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i x + C_i}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} \right)$$

Finalment, determinarem els valors de les A_i , B_i i C_i , fent la suma i aplicant el principi d'identitat dels polinomis o donant diferents valors a les x i resolent el sistema que resulta.
Pel que hem vist de la integral de fraccions simples, sabem que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \text{ frac. simples + logaritmes + arc tg}$$

4. El denominador descompon en factors de primer i segon grau amb distintes multiplicitats.

$$Q(x)=K\,(x - \alpha_1)^{r1}\cdot\cdot(x-\alpha_k)^{rk}\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s1}\cdot\cdot(x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{sm}$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar a cada factor de primer grau repetit r vegades:

$$(x - \alpha_i)^{ri} \longrightarrow \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + \frac{A_{ri-1}}{(x-\alpha_i)^{r1-1}} + \ldots + \frac{A_0}{x-\alpha_i}$$

i a cada factor de segon grau de multiplicitat s, les s fraccions simples:

$$x^2+\beta x+\gamma \longrightarrow \frac{B_s x+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} + \frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{(x^2+\beta x+\gamma)^{s-1}} + .. + \frac{B_0 x+C_0}{x^2+\beta x+\gamma}$$

i així la funció inicial s'expressa en la forma :

$$\frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r1}} + . + \frac{A_0}{x-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{si}\,x + C_{si}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^s} + . + \frac{B_0 x + C_0}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} \right).$$

Sols ens queda fer la suma i donar valors a la x, o aplicar el principi d'identitat dels polinomis, per tal de determinar els coeficients A, B, C.

Llavors tindrem que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \text{ frac. simples + logaritmes + arc tg}$$

TRIGONOMETRICO - RACIONALS.

$\int$ **R[sin x, cos x]dx on R és funció racional de sin i cos.**

Aquestes integrals, s'acostumen a resoldre, fent el canvi de variables t = tg x/2. Observem en que es transformen els diferents elements que apareixen, quan fem aquest canvi:

$$\sin x = 2\sin x/2 \cos x/2 = \frac{\dfrac{2\sin x/2}{\cos x/2}}{\dfrac{1}{\cos^2 x/2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \frac{\dfrac{\cos^2 x/2-\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}{\dfrac{1}{\cos^2 x/2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

i per ser $x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\, t \Rightarrow dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Amb el que, quan substituim, la integral es transforma en:

$$\int R[\sin x, \cos x]dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

que és una integral racional.

Exemple:

$$\int \mathrm{cosec}\, x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Si fem $t = \mathrm{tg}x/2 \Rightarrow \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \quad$ i $\quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\mathrm{tg}x/2| + C$$

En alguns casos particulars es poden fer canvis mes senzills

per $\int R[\sin x]\cos x\, dx$, podem fer el canvi $\sin x = t$

per $\int R[\cos x]\sin x\, dx$, fem $\cos x = t$

i per $\int R[\mathrm{tg}\, x]\, dx$ o $\int R[\sin^2 x, \cos^2 x]\, dx$ fem $\mathrm{tg}\, x = t$.

INTEGRALS QUE TENEN SUMES DE $\sqrt[n]{x}$.

Quan a una integral es té una suma d'arrels de la variable, sota diferents índexs, s'acostuma a realitzar el següent canvi de variables:

$x = t^k$ on k és el mínim comú múltiple dels índexs de les arrels.

Exemple:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|1+t| = 2\sqrt[6]{x^3} - 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|1+\sqrt[6]{x}| =$$

$$= 2\sqrt[2]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|1+\sqrt[6]{x}| + C .$$