anàlisi de funcions

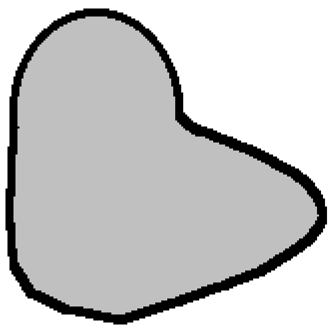
4 integral definida

CONCEPTE D'ÀREA.

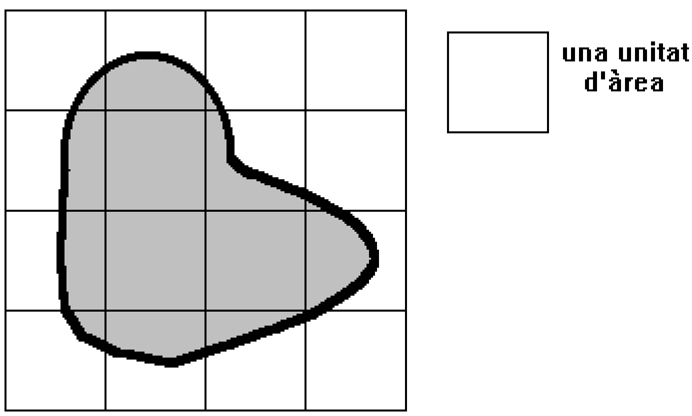
El càlcul de la longitud d'una corba, de l'àrea d'una figura plana o del volum d'un cos és un dels problemes matemàtics que ja es plantejaren els grecs. Se sap que Arquimedes (segle III a C) va calcular àrees de cercles, d'el.lipses i de seccions paraboliques. Els matemàtics grecs varen desenvolupar l'anomenat mètode exhaustiu, que permetia calcular l'àrea d'una figura plana, mitjançant successives aproximacions.

Aquest mètode seguia el camí que es mostra en el següent

Exemple:
Si volem calcular l'àrea de la figura

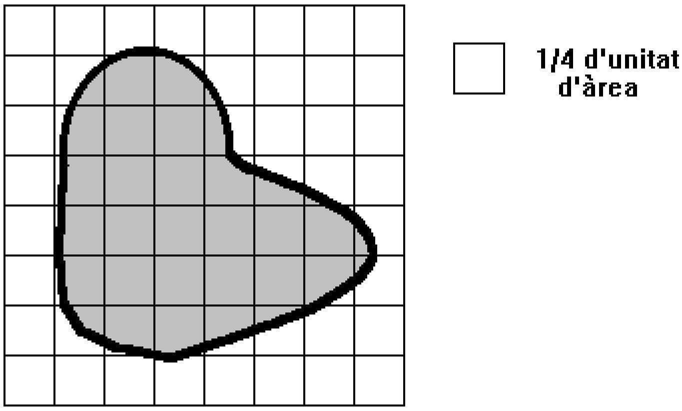


la podem situar sobre una retícula quadrada, on l'àrea de cada un dels quadrats serà presa com a unitat d'àrea:



Llavors observem que la figura ocupa parcialment 14 dels quadrats i que dintre la figura n'hi han 3, per tant l'àrea buscada està entre 3 i 14 unitats d'àrea.

Si aquesta aproximació de la figura s'ajusta a les nostres necessitats, ja podem dir que coneixem l'àrea buscada; mentre que si l'aproximació no és prou bona, podem dividir cada quadrat de la retícula anterior en 4 trossos, cada un d'aquests trossos té una superfície de 1/4 unitats d'àrea.



Hi ha 16 quadrats inclosos dintre la figura i aquesta es superposa en 36, per tant l'àrea buscada està entre 16/4 i 36/4 d'unitat d'àrea; és a dir l'àrea de la figura està entre 4 i 9 unitats d'àrea.

Seguint aquest procés podem calcular qualsevol àrea, amb un error màxim prefixat.

Matemàtics posteriors van cercar mètodes de càlcul de longituds de corbes i d'àrees, però fins al segle XVII no s'aconsegueixen resultats realment importants i innovadors.

SUMES SUPERIORS I SUMES INFERIORS.

PARTICIONS D'UN INTERVAL.

Donat un interval [a,b] diem que:

$P=\{\xi_0, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \xi_n\}$ és una partició de [a,b]$\Leftrightarrow a = \xi_0 < \xi_1 < ...< \xi_{n-1} < \xi_n = b$.

Si P i P' són dues particions de l'interval [a,b] direm que:
P' és més fina que P $\Leftrightarrow$ $P \subset P'$.
És clar que, donades P i P' dues particions d'un interval [a,b], sempre existeix una altra partició P'' més fina que les inicials. (N'hi ha prou en prendre $P''= P \cup P'$)

SUMES SUPERIORS I SUMES INFERIORS.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ funció fitada i $P=\{ \xi_0, \xi_1, \xi_2,... \xi_{n-1} , \xi_n\}$ una partició de l'interval [a,b].
f és fitada a [a,b] $\Rightarrow$ a cada un dels intervals $[\xi_{i-1} , \xi_i]$ la funció f està fitada, per la qual cosa podem considerar els valors:

M_i = mínima fita superior de f(t) amb $t\in[\xi_{i-1} , \xi_i]$ = suprem de f(t) amb $t\in[\xi_{i-1} , \xi_i]$ i
m_i = màxima fita inferior de f(t) amb $t\in[\xi_{i-1}, \xi_i]$ = ínfim de f(t) amb $t\in[\xi_{i-1} , \xi_i]$.

Llavors definim:
Suma superior de f associada a la partició P com

$$\mathbf{S(f,P)} = \sum_{i=1}^{n} M_i (\xi_i - \xi_{i-1}) = M_1 (\xi_1 - \xi_0) + M_2 (\xi_2 - \xi_1) + ... + M_n (\xi_n - \xi_{n-1}) ;$$

Suma inferior de f associada a la partició P com

$$\mathbf{s(f,P)} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\xi_i - \xi_{i-1}) = m_1 (\xi_1 - \xi_0) + m_2 (\xi_2 - \xi_1) + ... +m_n (\xi_n - \xi_{n-1}).$$

PROPIETATS.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ fitada

Si P és una partició de [a,b] ; k i K són fites inferior i superior respectivament de f a l'interval [a,b] $\Rightarrow$ $k (b - a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq K (b - a)$.

Demostració:
Per definició de m_i i M_i tindrem que $k \leq m_i \leq M_i \leq K$ $i = 1 , .. , n$;
amb el que:

$$\begin{aligned} k (b - a) &= k (\xi_n - \xi_0) = k (\xi_1 - \xi_0) + k (\xi_2 - \xi_1) + ... + k (\xi_n - \xi_{n-1}) \leq \\ &\leq m_1 (\xi_1 - \xi_0) + m_2 (\xi_2 - \xi_1) + ... + m_n (\xi_n - \xi_{n-1}) = \mathbf{s(f,P)} \leq \\ &\leq M_1 (\xi_1 - \xi_0) + M_2 (\xi_2 - \xi_1) + ... + M_n (\xi_n - \xi_{n-1}) = \mathbf{S(f,P)} \leq \\ &\leq K(\xi_1 - \xi_0) + K (\xi_2 - \xi_1) + ... + K (\xi_n - \xi_{n-1}) = K (\xi_n - \xi_0) = K (b - a) . \end{aligned}$$

Per qualsevol partició P de l'interval [a,b] $\Rightarrow$ s(f,P) $\leq$ S(f,P) .
És evident a partir de la propietat anterior.

Donades P, P' particions de [a,b]. Si $P \subset P' \Rightarrow$ $s(f,P) \leq s(f,P')$ i $S(f,P) \geq S(f,P')$.

Demostrarem la desigualtat de les sumes inferiors, la de les sumes superiors es fa d'una marera semblant.
Sigui $P=\{ \xi_0, \xi_1 ,... \xi_{n-1} , \xi_n \} \subset P' \Rightarrow$ P' té més punts que P.

- Si P' té exactament un punt més que P:
  $P'=P \cup \{q\} = \{ \xi_0, \xi_1, \xi_2,... \xi_{n-1}, \xi_n\} \cup \{q\} = \{ \xi_0, \xi_1,..., \xi_{k-1} , q , \xi_k,..., \xi_n\}$.
  Per definició de suma inferior
  $\mathbf{s(f,P)} = m_1 (\xi_1 - \xi_0) + ... + m_k (\xi_k - \xi_{k-1}) + ... + m_n (\xi_n - \xi_{n-1})$ i **(1)**
  $\mathbf{s(f,P')} = m_1 (\xi_1 - \xi_0) + .. + m (q - \xi_{k-1}) + m' (\xi_k - q) + .. + m_n (\xi_n - \xi_{n-1})$
  on m = màx fites inf de f(t)amb $t\in[\xi_{k-1} , q]$
  i m' = màx fites inf de f(t) amb $t\in[q , \xi_k]$.
  Per altra banda per ser $[q , \xi_k] \subset [\xi_{k-1} , \xi_k] \Rightarrow m_k \leq m$
  i $[\xi_{k-1} , q]\subset [\xi_{k-1} , \xi_k] \Rightarrow m_k \leq m'$.

  Amb el que
  $m_k (\xi_k - \xi_{k-1}) = m_k (\xi_k - q) + m_k (q - \xi_{k-1}) \leq m (\xi_k - q) + m' (q - \xi_{k-1})$.

  I per tant de l'expressió (1) obtenim:
  $\mathbf{s(f,P)} = m_1 (\xi_1 - \xi_0) + ... + m_k (\xi_k - \xi_{k-1}) + ... + m_n (\xi_n - \xi_{n-1}) \leq$
  $\leq m_1 (\xi_1 - \xi_0) + .. + m (q - \xi_{k-1}) + m' (\xi_k - q) + .. + m_n (\xi_n - \xi_{n-1})= \mathbf{s(f,P')}$

  Per tant si P' té un punt més que P $\Rightarrow$ $\mathbf{s(f,P) \leq s(f,P')}$.

- Si P' té s punts més que P: $P' = P \cup \{ q_1 , q_2 , ... , q_s \}$
  Considerem $P_1 = P \cup \{q_1 \}$, pel que hem vist abans $\mathbf{s(f,P) \leq s(f,P_1)}$.
  $P_2 = P_1 \cup \{q_2 \}$ llavors $\mathbf{s(f,P_1) \leq s(f,P_2)}$.

  Repetint s vegades aquest procés , obtenim :
  $\mathbf{s(f,P) \leq s(f,P_1) \leq s(f,P_2) \leq s(f,P_3) \leq ... \leq s(f,P_{s-1}) \leq s(f,P_s) = s(f,P')}$.

P i P' són particions de [a,b] $\Rightarrow$ $s(f,P) \leq S(f,P')$.

Demostració:
Sigui P'' una partició més fina que P i P' , per la propietat anterior:
$P \subset P'' \Rightarrow \mathbf{s(f,P) \leq s(f,P'')}$ i $\mathbf{S(f,P) \geq S(f,P'')}$
$P' \subset P'' \Rightarrow \mathbf{s(f,P') \leq s(f,P'')}$ i $\mathbf{S(f,P') \geq S(f,P'')}$
i com sempre $\mathbf{s(f,P'') \leq S(f,P'')}$.

Amb el que: $\mathbf{s(f,P) \leq s(f,P'') \leq S(f,P'') \leq S(f,P')}$.

Si f és una funció positiva i P una partició de [a,b]
$\Rightarrow$ s(f,P) $\leq$ àrea sota la funció entre a i b $\leq$ S(f,P).

Resultat evident, per la manera que hem definit **s(f,P)** i **S(f,P)** .

INTEGRAL DEFINIDA. FUNCIONS INTEGRABLES RIEMAN.

Si $f:[a,b] \longrightarrow R$ fitada, de les propietats anteriors, es dedueix que, variant P sobre totes les particions de l'interval [a,b], **s(f,P)** està fitat superiorment i **S(f,P)** està fitat inferiorment.
Aquest fet, ens permet de definir:

$\overline{\int_a^b}$ **f(x) = integral superior de f a [a,b] = major fites inferiors de S(f,P) variant P.**

$\underline{\int_a^b}$ **f(x) = integral inferior de f a [a,b] = menor fites superiors de s(f,P) variant P.**

Per les propietats de les sumes inferiors i superiors, podem afirmar que:

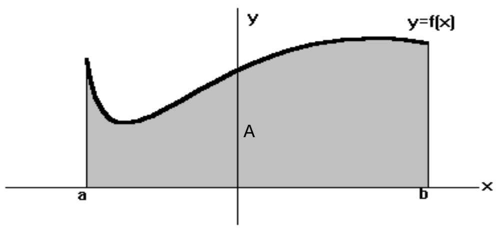
$$\underline{\int_a^b} \mathbf{f(x)} \leq \overline{\int_a^b} \mathbf{f(x)} \text{ ,}$$

però no sempre són iguals.
Per això diem que:

f és integrable (segons Rieman) $\Leftrightarrow$ $\underline{\int_a^b}$ **f(x)** $=$ $\overline{\int_a^b}$ **f(x)** i d'aquest valor en diem **integral de f(x)dx entre a i b**, i el representem per $\int_a^b$ f(c) dx .

Observacions

- Si $f \geq 0$ a [a,b], per la forma en que hem definit la integral, l'àrea del recinte limitat per l'eix de les X, la gràfica de y=f(x) i les rectes x=a i x=b, és precisament el valor de la integral.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Àrea recinte.}$$

- No totes les funcions són integrables, per exemple $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x irracional} \\ 0 & \text{si x racional} \end{cases}$

  no és Rieman integrable a l'interval [0,1].
  Doncs si considerem una partició qualsevol, a cada interval $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
  hi ha irracionals $\Rightarrow$ màx f a $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ és 1$\Rightarrow$**S(f,P)**$=\sum 1\cdot(\xi_i-\xi_{i-1})= 1 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x) = 1$.
  hi ha racionals$\Rightarrow$ mín f a $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ és 0$\Rightarrow$ **s(f,P)**$=\sum 0\cdot(\xi_i- \xi_{i-1}) =0 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x) = 0$.
  són diferents $\Rightarrow$ f no és Rieman integrable.

TEOREMA.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua $\Rightarrow$ f és integrable .

Aquest és un teorema de demostració força complexa i elaborada que cau fora dels objectius del curs.

INTERGRALS IMPROPIES.

Per definir la $\int_a^b f(x)\,dx$, hem suposat a i b reals i f fitada ,

sovint, però, ens trobem que a o b són $\pm\infty$ i llavors parlem de les integrals impròpies, definint-les en la forma:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^{k} f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^{b} f(x)\,dx .$$

PROPIETATS DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Si $f:[a,b] \longrightarrow R$ f integrable, és fàcil comprovar que:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Si $c\in(a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

TEOREMA DEL VALOR MITJA DE LA INTEGRAL.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua $\Rightarrow$

existeix $c\in(a,b)$ de manera que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\, f(c)$.

Demostració:

Per ser f contínua a [a,b] i pel teorema de Weierstraß, existeixen x_m i x_M mínim i màxim absoluts de f a [a,b].

Llavors, per qualsevol partició P de l'interval, tindrem

$$f(x_m)(b-a) \le \mathbf{s(f,P)} \le \mathbf{S(f,P)} \le f(x_M)(b-a) .$$

Per ser $\underline{\int_a^b} f(t)$ la menor de les fites superiors dels s(f,P) $\Rightarrow$ $\mathbf{s(f,P)} \le \underline{\int_a^b} f(t)$.

Per ser $\overline{\int_a^b} f(t)$ la major de les fites inferiors dels S(f,P) $\Rightarrow$ $\overline{\int_a^b} f(t) \leq \mathbf{S(f,P)}$.

I com f és contínua en [a,b] $\Rightarrow$ f integrable $\underline{\int_a^b} f(t) = \overline{\int_a^b} f(t) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Amb el que :

$$f(x_m)\,(b - a) \leq \mathbf{s(f,P)} \leq \underline{\int_a^b} f(t) = \int_a^b f(t)\, dt = \overline{\int_a^b} f(t) \leq \mathbf{S(f,P)} \leq f(x_M)\,(b - a) .$$

i per tant $\quad f(x_m)\,(b - a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq f(x_M)\,(b - a)$.

Per altra banda, f contínua $\Rightarrow$ f(x)(b - a) és contínua,
i pel teorema dels valors intermedis existeix $c \in (a,b)$ de manera que

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(c).$$

LA FUNCIÓ INTEGRAL.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ integrable, és clar que per tot valor $x \in [a,b]$ f és integrable a l'interval [a,x] i que, per tant, podem considerar la funció:

$$F : [a,b] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

que anomenem **funció integral** de f.

TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL INTEGRAL.

f contínua $\Rightarrow$ la funció integral és una primitiva de f.

És a dir:

$f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua $\Rightarrow$ $F:[a,b] \longrightarrow R$

$x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

F(x) és derivable i F '(x) = f(x) .

Demostració:

Considerem $x_0 \in [a,b]$ i $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt = \int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

pel teorema del valor mitjà

existeix $c \in (x, x_0)$ de manera que $\int_{x0}^x f(t)\, dt = f(c)\,(x - x_0)$

per tant

$$F(x) - F(x_0) = f(c)\,(x - x_0).$$

Dividint per $x - x_0$ $\quad \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c)\dfrac{x - x_0}{x - x_0} = f(c)$ amb $c \in (x, x_0)$.

Prenent límits $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c)$,

i com $c \in (x, x_0)$ i f és contínua $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$

amb el que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

és dir: F derivable en x_0 i $F'(x_0) = f(x_0)$.

REGLA DE BARROW.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ on F primitiva de f.

Demostració:
Siguin G(x) la funció integral $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ i F(x) una primitiva qualsevol de f.

Tant G(x) com F(x) són primitives de f(x), amb el que són iguals excepte en una constant additiva $\Rightarrow$

$G(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \Rightarrow G(a) = F(a) + C$.

substituint $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

Amb el que : $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Finalment, prenent $x = b \Rightarrow$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) .$$

CANVI DE VARIABLES.

Si f és contínua i g és derivable amb continuïtat $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \qquad \text{on } g(x) = t$$

Demostració:

Si F és una primitiva de f , per la regla de la cadena, tenim:

$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) \quad \Rightarrow F \circ g$ és primitiva de $f \circ g$.

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = (F \circ g)(x) \Big]_a^b = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) =$$

$$= F(t) \Big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt .$$

Exemple:

Calculem $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Si fem $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$ i

$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t.$

Quan $x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 \Rightarrow t=0$

$x = 2 \Rightarrow t = \arcsin 1 \Rightarrow t = \pi/2$

Amb el que:

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t\, 2 \cos t\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = 2t + \sin 2t \Big]_0^{\pi/2} = 2\pi/2 + \sin 2\pi/2 - 2 \cdot 0 - \sin 2\cdot 0 = \pi .$$

CÀLCUL D'ÀREES PLANES.

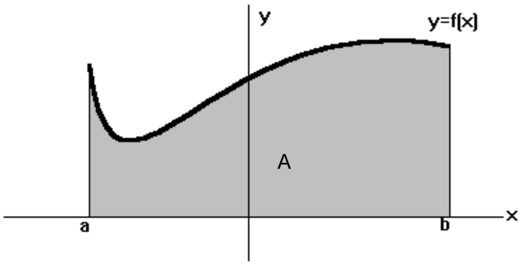
ÀREA SOTA LA CORBA.

Ens plantegem el càlcul de l'àrea A del recinte limitat pel gràfic d'una funció, l'eix de les X i les rectes x = a i x = b.
Per la forma en que hem definit la integral, tenim que:

Si f és una funció contínua i positiva en [a,b], el valor de la integral entre a i b coincideix amb l'àrea del recinte limitat per l'eix de les X, la gràfica de y=f(x) i les rectes x=a i x=b.

És a dir:
$f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua

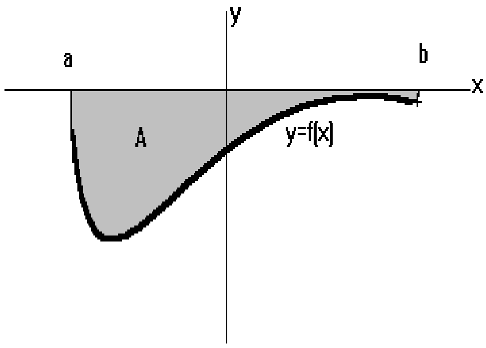
$$f \geq 0 \Rightarrow A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Pel que fa al cas f negativa, el valor de la integral és menys l'àrea del recinte.
És a dir:

$f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua i

$$f \leq 0 \Rightarrow A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

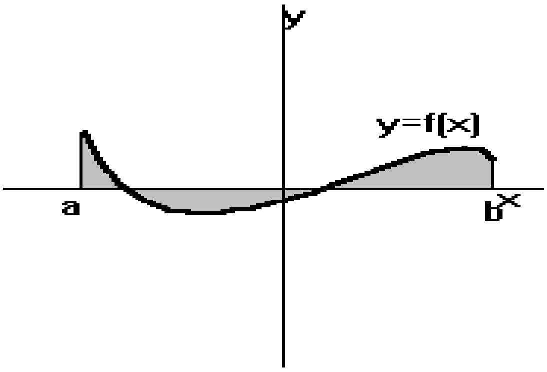


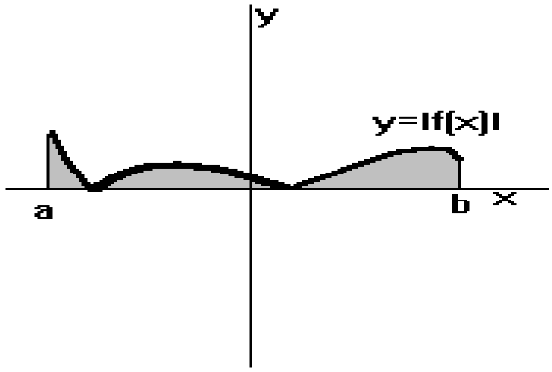
N'hi ha prou en considerar la funció $g(x) = -f(x)$.
Per qüestions de simetria, l'àrea limitada per la f, coincideix amb l'àrea limitada per g $\Rightarrow$

$$A = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

O bé, per ser $f \leq 0 \Rightarrow |f| = -f$, podem expressar-ho com $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$

Finalment el cas en que f és una funció qualsevol, amb trossos positius i trossos negatius.
Per determinar l'àrea que delimita la funció amb l'eix de les X, n'hi ha prou en trobar l'àrea que delimita el valor absolut de f amb l'eix de les X.



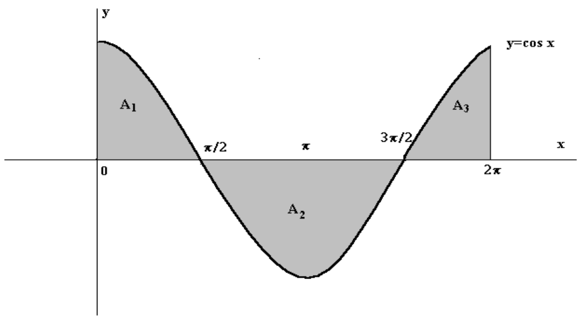


A la pràctica, es calculen per separat les àrees limitades pels trossos positius i les limitades pels trossos negatius i es sumen els resultats.

Exemple:
Calculem l'àrea limitada pel gràfic de $y = \cos x$ i l'eix de les X entre els punts 0 i 2π .

La funció és positiva en els intervals $[0,\pi/2]$ i $[3\pi/2,2\pi]$, i és negativa a l'interval $[\pi/2,3\pi/2]$.

Per tant, l'àrea buscada A la podem descomposar en tres àrees A_1, A_2 i A_3, de manera que $A = A_1 + A_2 + A_3$.



$$A_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big]_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1$$

$$A_2 = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = -\sin x \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -(\sin 3\pi/2 - \sin \pi/2) = -(-2) = 2$$

$$A_3 = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 3\pi/2 = -(-1) = 1$$

Per tant l'àrea buscada és $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ u}^2$.

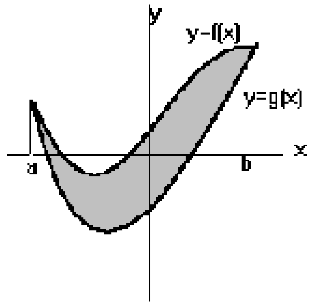
ÀREA LIMITADA PER DUES CORBES.

Donades

y = f(x) i y = g(x) funcions contínues definides en un interval [a,b]

Si per tota x $f(x) \geq g(x) \Rightarrow$ l'àrea limitada per les dues corbes entre a i b és

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Demostració:

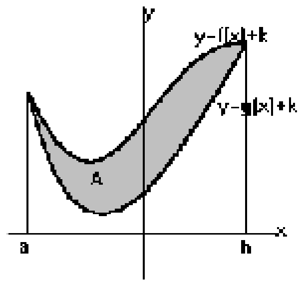
Sigui k de manera que $g(x)+k \geq 0$, n'hi ha prou en prendre una fita inferior de g i anomenar k al valor absolut d'aquesta fita.

Llavors, considerem les funcions $y=f(x)+k$ i $y=g(x)+k$.

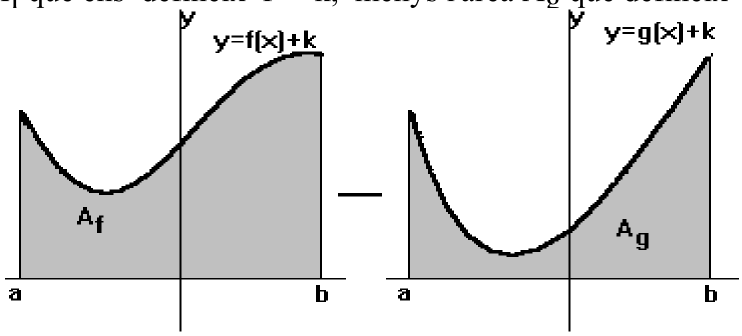
És clar que:

- solament hem desplaçat els gràfics k unitats, amb el que l'àrea limitada per f + k i g + k coincideix amb l'àrea limitada per f i g.

- tant f + k com g + k són ≥ 0 a tot l'interval [a,b].



Amb el que, l'àrea buscada A, la podem trobar a partir de l'àrea A_f que ens defineix f + k, menys l'àrea A_g que defineix $g + k \Rightarrow$

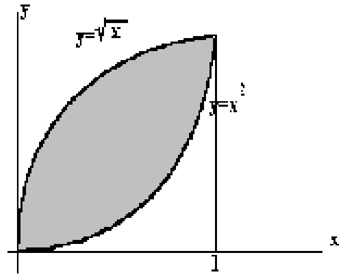


i cada una de les quals, és calculable a partir d'integrals .

$$A = A_f - A_g = \int_a^b (f(x)+k)dx - \int_a^b (g(x)+k)dx = \int_a^b (f(x)+k-g(x)-k)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

Exemple:

Calculem l'àrea limitada per les funcions $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ entre els seus punts de tall.



Trobem en primer lloc els punts de tall:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = 0 , x = 1 .$$

es tallen en x = 0 i x = 1 .

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/3 \text{ u}^2.$$

VOLUMS.

VOLUM D'UN COS DE SECCIÓ CONEGUDA.

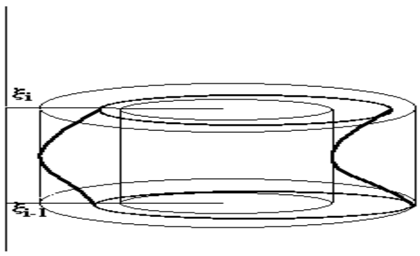
Considerem un cos del qual en coneixem l'àrea S(x) de la seva secció amb una família de plans paral.lels que depenen d'un paràmetre x que pren tots els valors reals entre a i b, el seu volum, és:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx .$$

Demostració:

Sigui $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b$ una partició de l'interval.

Per cada ξ_i considerem el cilindre inscrit i el cilindre circumscrit al tros de cos que va des de ξ_{i-1} a ξ_i.



Si x_i i X_i són respectivament el mínim i el màxim de S(x) per $x \in ([\xi_{i-1},\xi_i]$, es compleix que el volum del cilindre inscrit és

$$c_i = S(x_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) = S(x_i)\,\Delta x$$

i el volum del cilindre circumscrit és

$$C_i = S(X_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) = S(X_i)\,\Delta x .$$

El volum V d'aquest cos complirà que:

suma volums cilindres inscrits $\leq$ V $\leq$ suma volums cilindres circumscrits

és a dir: $$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} C_i .$$

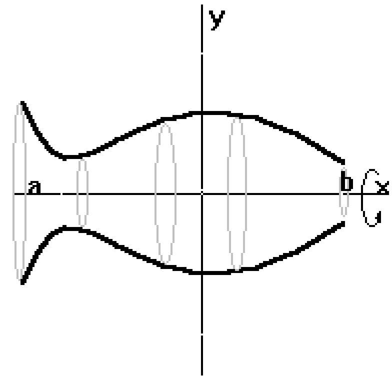
Fent $n \longrightarrow \infty$, el volum del cos serà el límit de les sumes dels volums de cilindres inscrits quan aquest coincideixi amb el límit de les sumes dels volums dels cilindres circumscrits.

Si S(x) és contínua els límits de les sumes coincideixen amb el volum del cos inicial. i per tant

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,x = \int_a^b S(x)\,dx .$$

VOLUM D'UN COS DE REVOLUCIÓ ENTORN DE L'EIX DE LES X.

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua



el volum que es genera quan fem girar el gràfic $y = f(x)$ entorn de l'eix de les X és:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx = \int_a^b \pi\, y^2 dx\,.$$

Demostració:

Com és un cos de revolució, quan es secciona amb plans perpendiculars a l'eix de les X, s'obtenen cercles de radi $|f(x)|$.

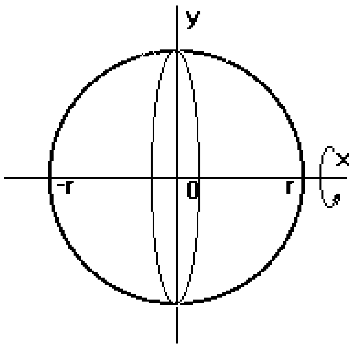
L'àrea de cada secció és $S(x) = \pi\,|f(x)|^2 = \pi\,(f(x))^2$, i per la propietat anterior:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx = \int_a^b \pi\, y^2\,dx\,.$$

Exemple:

Calcularem el volum d'una esfera de radi r.

L'esfera es pot obtenir, fent girar entorn l'eix de les X, la circumferència $x^2 + y^2 = r^2$.

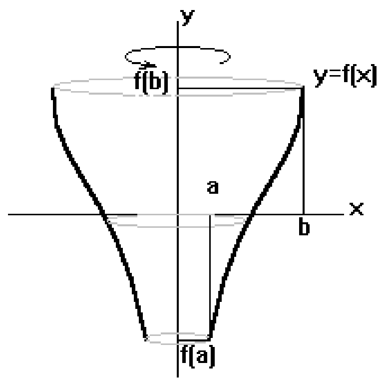


$$V = \int_{-r}^{r} \pi\, y^2\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\Bigg]_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}\,.$$

VOLUM D'UN COS DE REVOLUCIÓ ENTORN DE L'EIX DE LES Y.

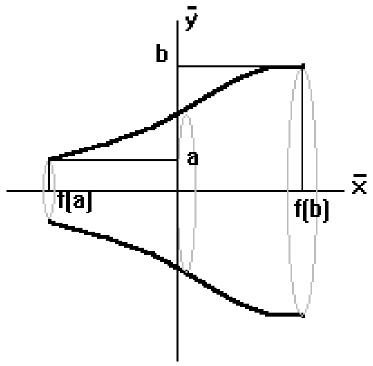
Donada $y = f(x)$ definida a l'interval $[a,b]$, si la fem girar entorn de l'eix de les ordenades, la figura de revolució que s'obté té un volum de:



$$V = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi (f^{-1}(y))^2\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi\, x^2\, dy .$$

Ja que:

Definint $\overline{x} = y$ i $\overline{y} = x$, s'observa que :



- $y = f(x)$ passa a ser $\overline{x} = f(\overline{y}) \Rightarrow \overline{y} = f^{-1}(\overline{x})$.
- x varia entre a i b $\Rightarrow \overline{y}$ varia entre $f(a)$ i $f(b)$.
- el cos s'obté de girar entorn de l'eix $\overline{x}$.

Amb el que, per la propietat anterior:

$$V = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi\ (f^{-1}(\overline{x}))^2\, d\overline{x} = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi\ (f^{-1}(y))^2\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi\, x^2\, dy .$$

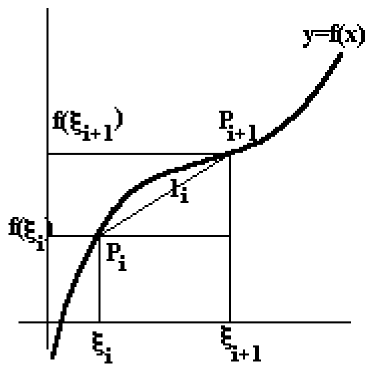
LONGITUD DE CORBES.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ derivable amb continuïtat,
$x \longrightarrow f(x)$

la corba $(x,f(x))$, des de $x = a$ fins a $x = b$, té la longitud $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Demostració:

Si $a = \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = b$ és una partició de l'interval $[a,b]$.



Per a cada ξ_i sigui P_i el punt de la corba de coordenades $P_i = (\xi_i, f(\xi_i))$.

Pel teorema de Pitàgoras, la longitud l_i de cada segment P_iP_{i+1} és

$$l_i = \sqrt{(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 + (f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i))^2}$$

dividint i multiplicant per $(\xi_{i+1} - \xi_i)$ tenim que:

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i))^2}{(\xi_{i+1} - \xi_i)^2}}\ (\xi_{i+1} - \xi_i)$$

i, com a cada $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ f és contínua a l'interval tancat i derivable a l'interval obert, podem aplicar el teorema del valor mitjà $\Rightarrow$

existeix $x_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ de manera que $\dfrac{(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i))}{(\xi_{i+1} - \xi_i)} = f'(x_i)$.

Substituint

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\ (\xi_{i+1} - \xi_i) = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x\ .$$

La longitud de la corba entre a i b és

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Exemple:
Calcularem la longitud d'una circumferència de radi r.

Mitja circumferència és $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad -r \le x \le r$.

Derivant $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

Amb el que, la longitud de la circumferència és:

$$L = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/r)^2}}$$

finalment fent $x = r\,u \Rightarrow r\,du = dx$ la integral queda:

$$L = 2r\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2r \arcsin u \Big]_{-1}^{1} = 2\pi r \text{ unitats de longitud .}$$

SUPERFÍCIE LATERAL D'UN COS DE REVOLUCIÓ.

Anàlogament a la demostració anterior, l'àrea del cos de revolució que es genera quan fem girar entorn de l'eix de les X la gràfica de la funció $y = f(x)$ per $x \in [a,b]$ és:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

IDEES SOBRE INTEGRACIÓ NUMÈRICA.

En general, per calcular una integral definida, s'acostuma a utilitzar la regla de Barrow; però aquesta necessita una primitiva per ser aplicada i el càlcul de la primitiva pot resultar molt feixuc.

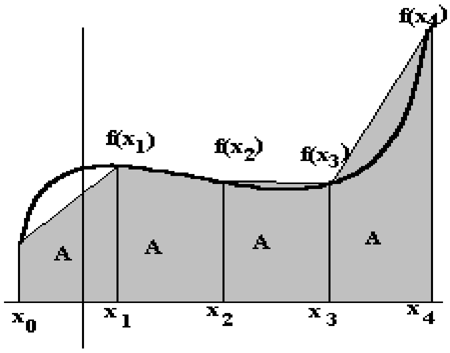
Per calcular una integral definida sense saber-ne cap primitiva, s'acostumen a utilitzar mètodes numèrics que aproximen la integral definida, per una aproximació de l'àrea sota la corba, amb un error predeterminat.

El mètode d'integració numèrica més senzill és el dels **trapezis** i consisteix a aproximar l'àrea sota la corba entre a i b, per trapezis.

MÈTODE DELS TRAPEZIS.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua, per aproximar el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$

podem seguir el procediment següent, que es coneix com a mètode dels trapezis.



Dividim l'interval [a,b] en n sub-intervals d'igual longitud h, $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ on $x_i=x_{i-1}+h$, i considerar els trapezis de vèrtexs els punts $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$ sobre l'eix de les X i les seves imatges sobre el gràfic de la corba $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$.

L'àrea de cada trapezi és $\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

I la integral buscada serà aproximadament la suma de les àrees de tots aquests trapezis. per tant :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + .. + f(x_n) \right].$$