anàlisi de funcions

1 continuïtat

APLICACIONS.

Donats A i B dos conjunts no buits , anomenem aplicació entre A i B a qualsevol llei que a cada element $x \in A$, li assigna un únic element $y \in B$ que se'n diu la imatge de x, i es representa per $y=f(x)$.

Del conjunt A, en diem **de sortida** i els seus elements són els originals, mentre que del conjunt B, se'n diu **final** .

El **gràfic** de l'aplicació és conjunt dels parells ordenats, on el primer element és de A i el segon element és la seva imatge. $G=\{(x,f(x)),\ x \in A\}$.

El conjunt $f(A)=\{y \in B \ / \ y=f(x)\}$ = conjunt dels elements que són imatges d'algun element de A, es coneix amb el nom de **conjunt imatge o conjunt de les imatges**.

Si $y_0 \in f(A)$ podem considerar les x que tenen per imatge aquest y_0, $\{x \in A \ / \ f(x) = y_0\}$, que anomenem **anti-imatges de y_0** i representem per $f^{-1}(x_0)$.

Finalment, acostumem a donar les aplicacions en la forma següent:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

i sovint, si no hi ha dubtes sobre els conjunts A i B, ens limitarem a donar una fórmula o llei que permeti trobar, a cada x, la seva imatge.

TIPUS D'APLICACIÓ.

Una aplicació és **injectiva** $\Leftrightarrow$ **elements diferents tenen imatges diferents** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1)=f(x_2) \quad \Rightarrow x_1=x_2$.

Una aplicació és diu **exhaustiva** o **suprajectiva** $\Leftrightarrow$ **tot element del conjunt final admet anti-imatge** $\Leftrightarrow$ $f(A)=B$.

Una aplicació és bijectiva $\Leftrightarrow$ és simultàniament injectiva i exhaustiva.

COMPOSICIÓ D'APLICACIONS. FUNCIÓ RECÍPROCA.

Donades les aplicacions $f:A \longrightarrow B$ i $g:C \longrightarrow D$

$x \longrightarrow f(x)=u$ $\quad$ $u \longrightarrow g(u)=y$

Si B és un subconjunt de C, podem considerar

$$A \xrightarrow{f} B \subset C \xrightarrow{g} D \qquad \text{és a dir:} \qquad A \longrightarrow D$$

$$x \longrightarrow f(x)=u \longrightarrow g(u)=g(f(x)) \qquad\qquad x \longrightarrow g(f(x))$$

que anomenem composició de f amb g i expressem com $g \circ f$.

És senzill de comprovar-ne les següents propietats:

- **Associativa : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$**
- En general, **no és commutativa**.
- **Té element neutre que és l'aplicació identitat $I:A \longrightarrow A$ $\quad$ $f \circ I=f$ i $I \circ f=f$.**
  $x \longrightarrow x$

- En general **no té element invers** .

  Però si , $f: A \longrightarrow B$ i $g:B \longrightarrow A$
  $x \longrightarrow f(x)$ $\quad$ $y \longrightarrow g(y)$

  diem que f i g són **recíproques** o **inverses per la composició** $\Leftrightarrow$ $f \circ g=I$ i $g \circ f=I$;
  en aquest cas, la g s'acostuma a dessignar per f^{-1} .
  Es pot comprovar que:
  f admet inversa per la composició $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

<u>ALGUNES DEFINICIONS SOBRE CONJUNTS REALS.</u>

INTERVALS.

Donats a i b dos nombres reals de manera que $a \le b$, podem considerar els conjunts següents, que anomenem **intervals**:

Obert $\{x \in R \,/\, a < x < b\} = (a,b) =]a,b[$	**Tancat** $\{x \in R \,/\, a \le x \le b\} = [a,b]$
$\{x \in R \,/\, a \le x < b\} = [a,b) = [a,b[$	$\{x \in R \,/\, a < x \le b\} = (a,b] =]a,b]$
$\{x \in R \,/\, a \le x\} = [a,\infty) = [a,\infty[$	$\{x \in R \,/\, a < x\} = (a,\infty) =]a,\infty[$
$\{x \in R \,/\, x \le a\} = (-\infty,a] =]-\infty,a]$	$\{x \in R \,/\, x < a\} = (-\infty,a) =]-\infty,a[$

ENTORN.

Donat $A \subset R$ un subconjunt de números reals i $x_0 \in A$, diem que:

A és un entorn de x_0 $\Leftrightarrow$ existeix $r > 0$ de manera que $(x_0-r, x_0+r) \subset A$.

FITES.

Donat A un subconjunt de reals, diem que:

$k \in R$ és una **fita superior** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\quad x \le k$

$k \in R$ és una **fita inferior** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\quad k \le x$

$k \in R$ és una **fita** de A $\Leftrightarrow$ per tot $x \in A$ $\quad -k \le x \le k$

A és **fitat** $\Leftrightarrow$ A té fita superior i fita inferior.

S= **suprem** de A $\Leftrightarrow$ S és la mínima de les fites superiors de A.

m= **ínfim** de A $\Leftrightarrow$ m és la màxima de les fites inferiors de A

FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL.

Donats A i B dos conjunts no buits de números reals, anomenem **funció real de variable real** de A en B, a qualsevol llei que assigna a cada element x del conjunt A ún únic element y del conjunt B, que s'en diu la imatje de x.

$$\begin{array}{rl} f:A & \longrightarrow B \\ x & \longrightarrow y = f(x) \end{array}$$

A les funcions reals de variable real, conjunt A on està definida la funció és el **Domini de f** =dom(f), mentre que el conjunt f(A) és el **recorregut**.

La x es coneix per **variable independent** i la y és l'anomenada **variable dependent**.

De cursos anteriors sabem que, fixant uns eixos de coordenades, podem identificar els punts del pla amb els parells ordenats de números reals; llavors el gràfic de la funció no és altra cosa que marcar tots parells ordenats del conjunt $\{(x,f(x))|\ x\in A\}$.

Per determinar una funció, cal especificar el conjunt de sortida, el conjunt final i la fórmula que permet obtenir les imatges; però, sovint donem les funcions només a partir de la fórmula, sobreentenent que el domini serà el conjunt de reals on aquesta fórmula es pot aplicar.

Així parlem de la funció y=1/x, en lloc de donar-la correctament en la forma

$$\begin{array}{rl} R\backslash\{0\}: & \longrightarrow R \\ x & \longrightarrow 1/x\ . \end{array}$$

OPERACIONS AMB FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL.

Donades $\begin{array}{rl} f:A & \longrightarrow B \\ x & \longrightarrow f(x) \end{array}$ i $\begin{array}{rl} g:A' & \longrightarrow B' \\ x & \longrightarrow g(x) \end{array}$ reals de variable real, definim:

Suma: (f+g)(x) = f(x) + g(x) .
És clar que: El domini de la suma és la intersecció dels dominis de f i g.

- És associativa: (f+g)+h = f+(g+h) .
- Té element neutre: l'aplicació $\begin{array}{rl} 0:R & \longrightarrow R. \\ x & \longrightarrow 0 \end{array}$
- Té element oposat: la funció oposada per la suma de y=f(x) és la y=-f(x).
- És commutativa f+g = g+f .

Producte: (f·g)(x) = f(x) · g(x) .
És clar que: La funció producte té per domini la intersecció dels dominis de f i g.

- És associatiu: (f·g)·h = f·(g·h) .
- Té element unitari: l'aplicació $\begin{array}{rl} 1:R & \longrightarrow R\ . \\ x & \longrightarrow 1 \end{array}$
- És commutatiu f·g = g·f .
- És distributiu respecte de la suma f·(g+h) = f·g + f·h
- En general no hi ha element invers.

Composició: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

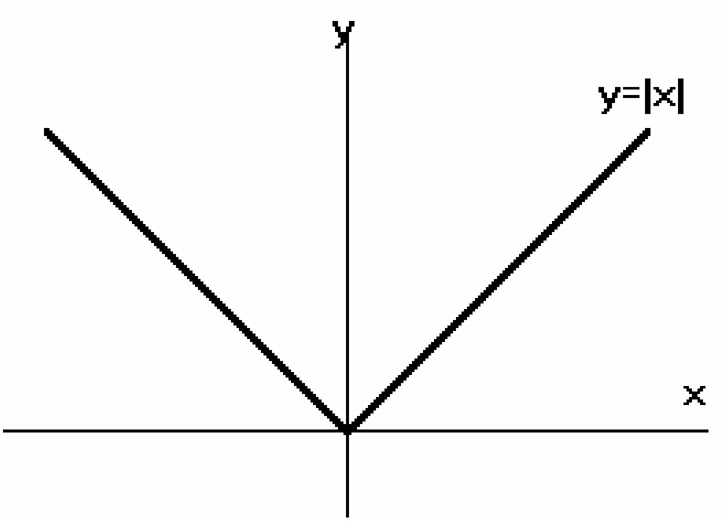
És clar que:

- La composició és associativa.
- No és commutativa.
- La identitat $I:R \longrightarrow R$ és l'element neutre.
  $x \longrightarrow x$
- No sempre admet recíproca.

LA FUNCIÓ VALOR ABSOLUT.

Anomenem valor absolut de x = $|x|$ a l'aplicació real de variable real definida en la forma:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{quan } x<0 \\ x & \text{quan } x\geq 0 \end{cases}$$



El gràfic de la funció valor absolut és
ja que:

si $x<0 \Rightarrow y = -x$ que és una recta
si $x>0 \Rightarrow y = x$ que és una recta
si $x=0 \Rightarrow y = 0$

Algunes de les propietats del valor absolut són:

Valor absolut de la suma és menor o igual que la suma dels valors absoluts.

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Valor absolut d'un producte és el producte dels valors absoluts.

$$|x\,y| = |x|\,|y|$$

Diferència de valors absoluts és menor o igual que el valor absolut de la diferència.

$$|x|-|y| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$$

$$\mathbf{|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y}$$

LÍMITS.

LÍMIT FUNCIONAL.

Donada $y = f(x)$ una funció real de variable real, $\mathbf{l} \in R$ i $\mathbf{x_0} \in R$, diem que:

l és el límit quan x tendeix a x_0 de f(x) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{l} = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta>0 \;\mid\; \forall x \;\; |x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-\mathbf{l}| <\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ U entorn de } \mathbf{l} \;\; \exists \text{ V entorn de } x_0 \mid f(V) \subset U$$

O amb un llenguatge més planer:

l és el límit quan x tendeix a x_0 de f(x), $\Leftrightarrow$ valors de x propers a x_0 , donen lloc a imatges properes a l .

LÍMITS LATERALS.

Donada f funció real de variable real, $\mathbf{l} \in R$ i $x_0 \in R$, diem que:

l és el límit lateral per la dreta quan x tendeix x_0 de f(x)

$$l = \lim_{x \to x_0+} f(x) \;\Leftrightarrow\; l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0 \mid \forall x \;\; x>x_0 \;\; |f(x) - \mathbf{l}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ U entorn de } \mathbf{l} \;\; \exists \text{ V entorn de } x_0 \text{ i } \;\; \forall\, x \in V \;\; x>x_0 \Longrightarrow f(x) \in U .$$

És a dir:

Si ens apropem a x_0 a partir de x majors que la x_0, les imatjes, s'apropen a l.

Anàlogament es defineixen els límits laterals per l'esquerra.

l és el **límit lateral per l'esquerra** quan x tendeix x_0 de f(x) $\Leftrightarrow$

$$l = \lim_{x \to x_0-} f(x) \;\Leftrightarrow\; l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$$

Es compleix la següent propietat:

Existeix límit funcional $\Leftrightarrow$ existeixen límits laterals i coincideixen.

És a dir:

$$\exists\; l = \lim_{x \to x_0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists\, l' = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \\ \exists\, l'' = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \end{cases} \text{ i } \;\; \mathbf{l' = l'' = l}$$

INFINITÈSSIMS.

Donada f una funció real de variable real definida en un entorn del punt x_0, diem que f és un **infinitèssim** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Donats f i g dos infinitèssims, diem que són **equivalents** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Per exemple el sin x i x , són infinitèssims equivalents en x=0, doncs $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

ÀLGEBRA DE LÍMITS.

Donades f i g funcions reals de variable real i $x_0 \in R$, es compleixen les següents propietats tant per a límits laterals com per a límits funcionals. (en el supòsit que existeixin tots els termes que s'indiquen; també són aplicables aquestes propietats en el cas que fem el límit quan x tendeix a $\pm\infty$).

El límit d'una constant és la constant. $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$

ja que: Si $f(x) = k \Rightarrow |f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$

El límit d'una suma és la suma dels límits. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

ja que: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l'$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l''$

donat un $\varepsilon>0$ qualsevol,

existeixen $\delta'>0$ i $\delta''>0$ de manera que $\forall x \begin{cases} |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon/2 \\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - l''| < \varepsilon/2 \end{cases}$

prenent δ el mínim entre δ' i δ'' tenim que

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow \begin{cases} |x - x_0| < \delta \le \delta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon/2 \\ |x - x_0| < \delta \le \delta'' \Rightarrow |g(x) - l''| < \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$

$|f(x)+g(x)-(l'+l'')| \le |f(x)- l'| + |g(x)- l''| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

El límit d'un producte és el producte dels límits. $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

ja que: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l'$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l''$

Com $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l' \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)- \mathbf{l}| < \varepsilon$

en particular per $\varepsilon=1$ existeix δ i si $|x-x_0|<\delta$ $|f(x)- \mathbf{l}| < 1 \Rightarrow$

$-1< f(x)- \mathbf{l} < 1 \Rightarrow \mathbf{l} -1< f(x) < \mathbf{l} +1$

i per tant f(x) està afitada a un entorn de x_0 .

Si considerem $|f(x)\cdot g(x) - l'\cdot l''|$

sumant i restant $f(x)\cdot l''$ obtenim

$|f(x)\cdot g(x) - l'\cdot l''| = |f(x)\cdot g(x) - l'\cdot l'' + f(x)\cdot l'' - f(x)\cdot l''|$

treien factor comú

$|f(x)\cdot g(x) - l'\cdot l'' + f(x)\cdot l'' - f(x)\cdot l''| = |f(x)\cdot(g(x) - l'') + l''\cdot(f(x) - l')| \le$

$\le |f(x)|\cdot|g(x) - l''| + |l''|\cdot|f(x)-l'|$

Si **K** és una fita superior de f. considerem **M**= màx{**K** , $|l''|$}

tenim que

Com $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l' \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta_1>0 \mid \forall x \ |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)- \mathbf{l'}| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}$

Com $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'' \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta_2>0 \mid \forall x \ |x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)- \mathbf{l''}| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}$

I per tant

$\forall\varepsilon>0$ considerem $\dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$ i per tant $\exists\ \delta=\text{mín}(\delta_1, \delta_2)>0 \quad \forall x \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$|f(x)\cdot g(x) - l'\cdot l''| \le |f(x)|\cdot|g(x) - l''| + |l''|\cdot|f(x) - l'| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$

Propietat

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

ja que:

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \neq 0 \Rightarrow 1 = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

El límit d'un quocient és el quocient dels límits.

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ sempre i quan $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

ja que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

El límit d'una potència és la potència del límit:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{\alpha}\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\alpha}$$

El límit d'una exponencial és l'exponencial del límit:

$$\lim_{x\to x_0}\left[a^{g(x)}\right] = a^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

CONCEPTE DE FUNCIÓ CONTÍNUA.

Sigui y=f(x) funció real de variable real i $x_0 \in dom(f)$, llavors diem que :
f és **contínua** en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ **és el mateix fer límits que substituir .**

$$\Leftrightarrow \text{ existeix } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, l' = \lim_{x\to x_0+} f(x) \\ \exists\, l'' = \lim_{x\to x_0-} f(x) \quad \text{i} \quad \mathbf{l = l' = f(x_0)} \\ \exists\, f(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in dom(f) \text{ i } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \forall\, x \ \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon \ .$$

$$\Leftrightarrow \forall\, U \text{ entorn de } f(x_0)\ \ \exists\, V \text{ entorn de } x_0 \text{ i } f(V) \subset U \ .$$

Intuïtivament, una funció és contínua a x_0, si quan apropem les x a x_0, les imatges s'acosten a $f(x_0)$.

Una funció és contínua a un interval (a,b) $\Leftrightarrow$ és contínua a cada un dels punts de l'interval.

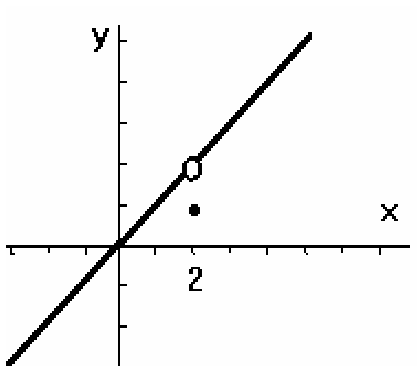
DISCONTINUÏTATS.

Sigui $f: A \longrightarrow R$ real de variable real i $x_0 \in A$, diem que:

x_0 és una **discontinuïtat** de f $\Leftrightarrow$ f no contínua en x_0.

Les discontinuïtats les podem classificar en:

- **Evitables**:
  x_0 és discontinuïtat evitable de y=f(x) $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ existeix $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
  Exemple:
  $$y = \begin{cases} x & \text{quan } x \neq 2 \\ 1 & \text{quan } x = 2 \end{cases}$$ té una discontinuïtat evitable en el 2 , ja que y(2)=1 i $\lim_{x\to 2} y = 2$



- **De Salt**: x_0 és discontinuïtat de salt $\Leftrightarrow$ **existeixen límits laterals i són diferents**
  $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x).$

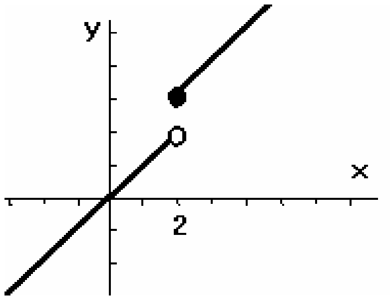
  Per exemple $$y = \begin{cases} x & \text{per } x<2 \\ x+1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$ té una discontinuïtat de salt en x=2.

ja que:

$$\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2} x = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2} x+1 = 3$$

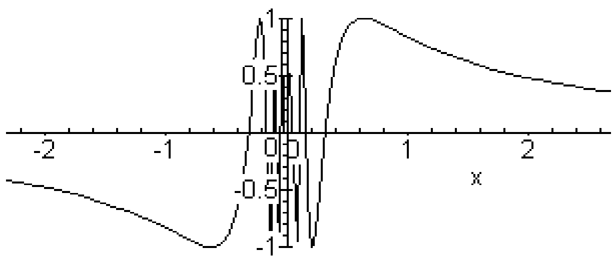
i aquests límits són diferents.



- **De segona espècie**:

x_0 és discontinuïtat de 2ª espècie ⇔ no existeix algun dels límits laterals.

Exemple:
La funció y=sin(1/x), té una discontinuïtat de 2ª espècie en x=0, ja que no existeix aquest límit.



Dintre de les discontinuïtats de segona espècie, trobem les discontinuïtats **asimptòtiques**, que es produeixen si algun dels límits laterals és ±∞.

OPERACIONS AMB FUNCIONS CONTINUES.

Les funcions constants són contínues: f(x) = k ⇒ f contínua a qualsevol x_0 .

Ja que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k = f(x_0) \Rightarrow$ contínua en x_0

La suma de contínues és contínua: f i g contínues en x_0 ⇒ f+g contínua en x_0 .

Ja que : f cont en $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ i g cont en $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

com el límit d'una suma és la suma dels límits

$$\lim_{x\to x_0}[f+g](x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$$

$\Rightarrow f+g$ contínua en x_0 .

El producte de contínues és contínua: f i g contínues en x_0 ⇒ f˙g contínua en x_0

Ja que : f cont en $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ i g cont en $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

com el límit d'un producte és el producte dels límits

$$\lim_{x\to x_0}[f\cdot g](x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) \Rightarrow$$

$f \cdot g$ contínua en x_0 .

.

El quocient de contínues és contínua excepte quan el denominador és 0:

f i g contínues en x_0 i $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(x)$ contínua en x_0.

Ja que : f cont en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ i g cont en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$

com el límit d'un quocient és el quocient dels límits quan el límit del denominador no és zero tenim que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ cont en } x_0 .$$

La potenciació de contínues:

f(x) contínua en $x_0 \Rightarrow (f(x))^n$ és contínua en x_0 .

La composició de contínues és contínua.

f contínua en x_0 i g contínua en $f(x_0) \Rightarrow g\circ f$ contínua en x_0 .

ALGUNS EXEMPLES DE FUNCIONS CONTINUES.

- Els polinomis són funcions contínues a tots els reals.
- Els quocients de funcions contínues és una funció contínua excepte en els punts que anul.len el denominador.
- Les arrels de contínues són contínues en el seu domini.
- La funció exponencial és contínua a tots els reals.
- La funció logarítmica és contínua en el seu domini $(0,\infty)$.
- Les funcions circulars i circulars inverses són contínues en els seus dominis.
- El valor absolut és contínua a tots els reals.

PROPIETATS DE LES FUNCIONS CONTINUES.

CONSERVACIÓ DEL SIGNE EN UN ENTORN.

f contínua en x_0 i $f(x_0)>0 \Rightarrow \exists\delta>0$ de manera que $\forall x\ |x-x_0| <\delta \Rightarrow f(x) > 0$.
o bé
f contínua en x_0 i $f(x_0)<0 \Rightarrow \exists\delta>0$ de manera que $\forall x\ |x-x_0| <\delta \Rightarrow f(x) < 0$.
És a dir :

Si una funció és contínua en x_0 i en x_0 $f(x_0)\neq 0$, existeix un entorn de x_0 en el que la funció té sempre el mateix signe.

ja que:
Raonarem sols la primera afirmació, ja que la segona és anàloga.
Suposen doncs $f(x_0)>0$.
Per definició de continuïtat tenim que:
f contínua en $x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ de manera que $\forall x\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$.
Prenent $\varepsilon=f(x_0)$ tenim que $\exists\delta>0$ de manera que $\forall x\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|<f(x_0)$
ara bé $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$ és equivalent a $-f(x_0)< f(x)-f(x_0)< f(x_0)$
i sumant a tots els membres $f(x_0)$, tenim que:

$\exists\delta>0$ de manera que $\forall x\ |x-x_0| <\delta \Rightarrow f(x) > 0$.

Com volíem demostrar.

PROPIETAT.

Donada $f:[a,b] \longmapsto R$

f contínua a l'interval tancat [a,b] $\Rightarrow \exists K>0$ i $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| < K$.

És a dir: **f contínua a [a,b] $\Rightarrow$ f fitada superior i inferiorment.**

Demostració:

Si f no té fita superior a l'interval [a,b], considerem $c = \dfrac{a+b}{2}$ punt mitjà entre a i b,

llavors f no està fitada superiorment a un dels dos subintervals [a,c] o [c,b].

Anomenem $[a_1,b_1]$ al subinterval on f no fitada superiorment.

Sigui $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ el punt mitjà entre a_1 i b_1,

llavors, f no està fitada superiorment en un dels dos subintervals $[a_1,c_1]$ o en $[c_1,b_1]$.

Anomenem $[a_2,b_2]$ al subinterval on f no està fitada.

Repetint aquest procés indefinidament, obtenim la successió d'intervals

$[a,b], [a_1,b_1], [a_2,b_2],.., [a_n,b_n],..,$

on cada un d'ells està inclòs en els seus anteriors, la seva longitud és $(b-a)/2^n$ i f no és fitada superiorment a cap dels intervals.

Fent el límit quan $n \to \infty$,aquesta successió d'intervals, tendeix cap a un punt α , que pertany a tots i cada un dels intervals de la successió.

Per ser f contínua a [a,b] $\Rightarrow$ f contínua a α , i per definició de funció contínua en un punt, tenim que:

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ de manera que $\forall x$ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$.

Per a cada ε, prenem $[a_n,b_n]$ de longitud menor a $\delta/2$, sempre existeix, ja que la longitud d'aquests intervals tendeix a zero.

Es compleix que $\alpha \in [a_n,b_n]$ i $\forall x \in [a_n,b_n] \Rightarrow |x-\alpha|<\delta/2<\delta$ i per tant,

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists n$ i $\forall x \in [a_n,b_n]$ $|f(x) - f(\alpha)|<\varepsilon$.

Prenent $\varepsilon=1$, tindrem que $\exists n$ i $\forall x \in [a_n,b_n]$ $|f(x) - f(\alpha)|<1$,

que equival a $\exists n$ i $\forall x \in [a_n,b_n]$ $-1 <f(x) - f(\alpha) <1$,

Sumant $f(\alpha)$ a tots els membre de la desigualtat, tenim que:

$\exists n$ i $\forall x \in [a_n,b_n]$ $f(x) <1 + f(\alpha) = K$.

Resultat que contradiu la hipòtesi de construcció de la successió.

Així doncs, f no pot ser no fitada superiorment.

TEOREMA DE WEIERSTRASS.

$f:[a,b] \longmapsto R$

f contínua a [a,b] $\Rightarrow \exists\ x_M, x_m \in [a,b]$ **i** $\forall x \in [a,b]\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ **.**

És a dir :

f contínua a [a,b] $\Rightarrow \exists\ x_M, x_m \in [a,b]$ **màxim i mínim absoluts de f a [a,b].**

Demostració:

Sols raonarem que existeix màxim, el mínim es faria de manera semblant.

Per la propietat anterior sabem que existeixen fites superiors de f([a,b]); sigui k_S la mínima d'aquestes fites.

N'hi ha prou en veure que existeix $x_M \in [a,b]$ i $f(x_M)=k_S$, ja que llavors tindrem que per tot x $f(x) \le k_S = f(x_M)$.

Per ser k_S la mínima de les fites superiors, tindrem que

$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in [a,b]$ de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$. (1)

Sigui $c = \dfrac{a+b}{2}$ el punt mitjà entre a i b, i considerem els intervals [a,c] i [c,b].

llavors, a un d'aquests subintervals es compleix que per qualsevol ε existeixen x de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$.

Si anomenem $[a_1,b_1]$ a aquest subinterval, tindrem que:

$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in [a_1,b_1]$ de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$. (1)

Sigui $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ el punt mitjà entre a_1 i b_1, considerem els intervals $[a_1,c_1]$ i $[c_1,b_1]$

llavors, a un d'aquests subintervals es compleix que per qualsevol ε existeixen x de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$.

Si anomenem $[a_2,b_2]$ a aquest subinterval, tindrem que:

$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in [a_2,b_2]$ de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$. (1)

Repetint aquest procés indefinidament, obtenim la successió d'intervals

$[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$,.., $[a_n,b_n]$,.., on cada un d'ells és inclòs als s seus anteriors, la seva longitud és $(b-a)/2^n$ i on per cada n es compleix la condició (1).

$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in [a_n,b_n]$ de manera que $| f(x) - k_S | < \varepsilon$.

Si fem el límit quan $n \to \infty$, aquesta successió d'intervals, tendeix cap a un punt α , que pertany a tots i cada un dels intervals de la successió.

Observem que li passa a aquest α.

Si $f(\alpha) \neq k_S$, arribem a una contradicció.

Per ser $\alpha \in [a,b]$, tenim que f és contínua a $\alpha \Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Sigui $[a_n,b_n]$ un interval de longitud $< \delta$, llavors tindrem que:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n\ \forall x \in [a_n,b_n] \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Prenent $\varepsilon = |f(\alpha) - k_S|/2 > 0 \Rightarrow \exists n\ \forall x \in [a_n,b_n] \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Però: $|f(x)-k_S| = |f(x)-f(\alpha)+f(\alpha)-k_S| \ge |f(\alpha)-k_S| - |f(x)-f(\alpha)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$

És a dir, si $f(\alpha) \neq k_S \Rightarrow \forall x \in [a_n,b_n]\ |f(x)-k_S| > \varepsilon$, resultat que contradiu (1).

Per tant $f(\alpha)=k_S$.
Prenent $x_M=\alpha$ es compleix que $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\le f(x_M) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ existeix màxim absolut de f a [a,b].

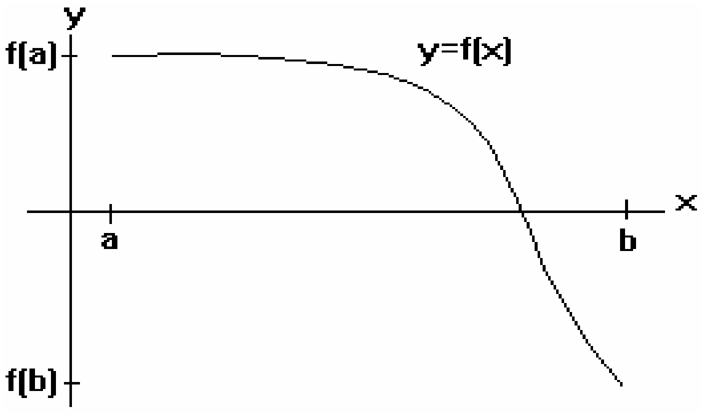
De manera anàloga podem raonar que f té mínim absolut.

TEOREMA DE BOLZANO.

Sigui $f:[a,b] \longrightarrow R$ contínua.
Si f(a) i f(b) tenen signes diferents ⇒ f té algun zero a l'interval (a,b).

És a dir:
$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists \mathbf{z}\in(a,b) \mid f(\mathbf{z})=0$

Intuïtivament si $f(a)>0$ i $f(b)<0$ i el gràfic de f no té talls entre a i b, per passar de positiu a negatiu, cal travessar en algun punt l'eix X, i en el que l'atravessem serà un zero de la funció.



Demostració:

Sigui $c=\dfrac{a+b}{2}$ el punt mitjà entre a i b.

- Si $f(c)=0$, ja tenim que existeix zero entre a i b, amb el que el teorema es compleix.

- Si $f(c)\neq 0$, considerem els subintervals [a,c] i [c,b].
  Com f(a) i f(b) tenen signes diferents i $f(c)\neq 0$, a un d'aquests subintervals els extrems tenen imatges amb signe diferent.
  Anomenarem $[a_1,b_1]$ a aquest subinterval.
  Sigui $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ el punt mitjà entre a_1 i b_1,
    - Si $f(c_1)=0$ ja tenim que es compleix el teorema, doncs hem trobat un zero de la funció.
    - Si $f(c_1)\neq 0$, considerem els subintervals $[a_1,c_1]$ i $[c_1,b_1]$.
      Com $f(a_1)$ i $f(b_1)$ tenen signes diferents i $f(c_1)\neq 0$, a un d'aquests subintervals els extrems tenen imatges amb signe diferent.
      Anomenarem $[a_2,b_2]$ a aquest subinterval.

  Procedint indefinidament de la manera anterior, es poden produir dues situacions:
- Obtenim c_n de manera que $f(c_n)=0$. En tal cas el valor predit pel teorema és c_n.
- No trobem cap c_n que compleixi $f(c_n)=0$.
  En aquest cas podem construir una successió d'intervals
  $[a,b], [a_1,b_1], \dots, [a_n,b_n], \dots$ encaixats, de longitud $(b-a)/2^n$, i caracteritzats per que en els extrems la funció pren valors amb signe diferent.
  Prenent el límit quan $n\to\infty$ se'ns defineix un punt $\alpha\in(a,b)$.
  Si $f(\alpha)=0$ fent $\alpha=\mathbf{z}$, ja hem trobat el zero buscat.
  Si $f(\alpha)\neq 0$ tindrà un signe concret i com f és contínua en α.
  Pel teorema de la conservació del signe $\Rightarrow$

$\exists\delta>0$ i $\forall x \ |x-\alpha|<\delta \Rightarrow f(x)$ té el mateix signe que $f(\alpha)$.
Prenem ara un interval $[a_n,b_n]$ de longitud menor a $\delta/2$, tindrem que $\forall x\in[a_n,b_n] \ |x-\alpha|<\delta/2<\delta \Rightarrow f(x)$ té el mateix signe que $f(\alpha)$;
en particular $f(a_n)$ i $f(b_n)$ tenen el mateix signe que $f(\alpha)$.
Resultat contradictori amb el mètode de construcció dels intervals.
Per tant, no pot ser que $f(\alpha)\neq0$.

PROPIETAT.

Sigui $f:[a,b]\longrightarrow R$ contínua i $h\in R$
$f(a)<h<f(b)$ o $f(b)<h<f(a) \Rightarrow$ existeix $z\in(a,b)$ i $f(z)=h$.

N'hi ha prou a considerar $g(x) = f(x) - h$ i aplicar-li el teorema de Bolzano.

CÀLCUL DEL SIGNE D'UNA FUNCIÓ.

Per calcular els intervals on una funció $y=f(x)$ és positiva o negativa, podem utilitzar el teorema de Bolzano de la següent manera:

Considerem els punts de discontinuïtat i els zeros de la funció; aquests punts ens marquen un seguit d'intervals, on la funció és contínua i no val zero.
Llavors a cada un d'aquests intervals, la funció té sempre el mateix signe; si no fos així podríem aplicar el teorema de Bolzano a la funció en aquest interval i hi trobaríem un zero.
Prenent un punt de cada interval i mirant quin signe té la funció en aquest punt, tindrem que a tot l'interval la funció té aquest signe.

APROXIMACIÓ DE ZEROS - MÈTODE DE LA BISECCIÓ.

La demostració que hem realitzat per justificar el teorema dels zeros de Bolzano és una demostració de tipus constructiu, ja que ens dóna un mètode, anomenat de la bisecció, que aproxima numèricament el punt predit pel teorema.
Aquest mètode el podem utilitzar també per aproximar solucions de qualsevol equació, en particular, d'equacions transcendents.

Exemple: Calculeu una solució de l'equació $x = \cos x$?

Considerem la funció $y(x)=x-\cos x$, y és contínua a tots els reals per ser suma de contínues. Resoldre l'equació, és trobar els zeros de y.

Prenem dos punts entre els quals suposem que hi ha un zero, per exemple el 0 i l'1 .
Com $y(0)=0-1=-1<0$ i $y(1)=1-\cos 1=0.459>0 \Rightarrow$ entre 0 i 1 hi ha una solució.

Prenem el punt mitjà entre 0 i 1 , és el 0.5 .
Com $y(0.5)=-0.37<0$ i $y(1)>0 \Rightarrow$ entre 0.5 i 1 hi ha una solució.

Prenem el punt mitjà entre 0.5 i 1 , és el 0.75 .
Com $y(0.75)=0.018>0$ i $y(0.5)<0 \Rightarrow$ entre 0.5 i 0.75 hi ha una solució.
Continuant aquest procés, podem aproximar la solució de l'equació fins a l'error màxim que desitgem.