anàlisi

1 successions

SUCCESSIONS DE NOMBRES REALS

Entendrem per successió e nombres reals a una aplicació del conjunt dels naturals N als reals:

$$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$n \longrightarrow f(n) = x_n$$

acostumem a representar les successions en la forma $(x_n)_{n \in N}$.
de les n en diem **subindex** i de $\mathbf{x_n}$ en diem **terme n** de la successió.

alguns exemples de successions:

- √2, √2, √2, ... que és una successió **constant**.
- 1, 2, 3, 4, 5,.... la successió dels naturals $x_n = n$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... successió de les potències de 2 on $x_n = 2^n$
- la coneguda successió de Fibonanni, on cada terme és la suma dels dos anteriors $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- la successió alternada 2, -2, 2, -2, 2, -2, ... de terme gereral $x_n = 2\cdot(-1)^n$.
- 3; 3.1; 3.14; 3.141; 3.1415; 3.14159; ....

SUCCESSIONS CREIXENTS i SUCESSIONS AFITADES.

Es diu que una successió $(x_n)_{n \in N}$
és **monòtona creixent** ⇔ per qualsevol n $x_n \le x_{n+1}$
i que és **monòtona decreixent** ⇔ per qualsevol n $x_n \ge x_{n+1}$
per exemple

- la successió dels naturals 1, 2, 3, 4, 5,.. de terme general $x_n = n$ és creixent.
- la successió $x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, -1, ... \}$ no és ni creixent ni decreixent.
- $\left(x_n = \dfrac{1}{n}\right) = \{1, 0.5, 0.333, 0.25, 0.2, ...\}$ és decreixent.

També diem que:
és **afitada superiorment per K** ⇔ per qualsevol n $x_n \le K$
és **afitada inferiorment per k** ⇔ per qualsevol n $k \le x_n$.

OPERACIONS AMB SUCCESSIONS

Com els termes de les succions que hem definit són números reals, podem aprofitar les operacions que tenim entre els reals i definir operacions entre successions
Si $(x_n)_{n \in N}$ i $(y_n)_{n \in N}$ són sucessions definim la successó
suma com $\mathbf{(x_n)_{n \in N} + (y_n)_{n \in N} = (x_n + y_n)_{n \in N}}$
producte com $\mathbf{(x_n)_{n \in N} \cdot (y_n)_{n \in N} = (x_n \cdot y_n)_{n \in N}}$

SUCCESSIONS CONVERGENTS

Donada $(a_n)_{n\in N}$ una successió i $\mathbf{l}\in\mathbf{R}$ un nombre real, diem que:
$(a_n)_{n\in N}$ és una successió convergent cap a l $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ **l és el límit quan n tendeix a ∞ de $(a_n)_{n\in N}$** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **l és el límit $(a_n)_{n\in N}$** $\Leftrightarrow$ $\lim a_n = l$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \ \forall n\in\mathbf{N}\ \ n>n_0 \Rightarrow |a_n - \mathbf{l}| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall$ U entorn de $\mathbf{l}$ $\exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \ \forall n\in\mathbf{N}\ \ n>n_0 \Rightarrow\ a_n\in U$
que en paraules planeres

per valors de n prou grans el valor de a_n s'apropen a l .

Exemples:

- La successió de terme general $a_n = \dfrac{1}{n}$ és convergent i $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

  ja que:

  Fixat $\varepsilon > 0$ sempre existeix n_0 natural de manera que $1/n_0 < \varepsilon$
  amb el que si $n\geq n_0$ $|1/n - 0| = 1/n < 1/n_0 < \varepsilon$
  és a dir $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \ \forall n\in\mathbf{N}\ \ n>n_0 \Rightarrow |1/n - 0| < \varepsilon$

- $\lim \dfrac{n+1}{n} = 1$

  ja que:

  Fixat $\varepsilon > 0$ considerem k de manera que $10^{-k} < \varepsilon$

  com $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{n+1-n}{n}\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right|$

  prenent $n_0 = 10^k \Rightarrow$

  tenim que $n \geq n_0 = 10^k \Rightarrow 1/n \leq 1/n_0 = 10^{-k} < \varepsilon$

  és a dir

  donat $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \ \forall\, n\in\mathbf{N}\ \ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.

- La successió $a_n = (-1)^n$ que va prenent els valors 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... i és evident que no és convergent.

PROPIETAT

Si una successió és convergent el seu límit és únic.

ja que:

Si la successió $(a_n)_{n\in N}$ té dos límits diferents l i l' arribem a una contradicció.

Considerem $\delta = |\mathbf{l} - \mathbf{l'}| > 0$ (1)

com $\lim a_n = l \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n > n_1 \Rightarrow |\, a_n - \mathbf{l}\,| < \delta/2$

com $\lim a_n = l' \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n > n_2 \Rightarrow |\, a_n - \mathbf{l'}\,| < \delta/2$

amb el que

$|\mathbf{l} - \mathbf{l'}| = |\mathbf{l} - a_n + a_n - \mathbf{l'}| \leq |\mathbf{l} - a_n| + |a_n - \mathbf{l'}| = |a_n - \mathbf{l}| + |a_n - \mathbf{l'}| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$

$\Rightarrow |\mathbf{l} - \mathbf{l'}| < \delta$

Fet que està en contradicció amb (1) .

ÀLGEBRA DE LÍMITS.

Per calcular el límit d'una successió acostumem a utilitzar les propietats següents, en el supòsit que tinguin límit.

El límit d'una successió constant és la constant. $\lim k = k$

ja que: Si $\forall n \quad a_n = k \Rightarrow |\, a_n - k\,| = |\, k - k\,| = 0 < \varepsilon$

El límit s'una constant per una successió, e´s la constant pel límit dela successió.

$\lim k\cdot(a_n) = k\cdot \lim a_n$

ja que

Si $\lim a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ i si $n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon/k$

i per tant $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ i si $n \geq n_0 \quad |k\cdot a_n - k\cdot a| < k\cdot\varepsilon/k = \varepsilon$.

El límit d'una suma és la suma dels límits.

$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

ja que: Si $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$

donat un $\varepsilon > 0$ qualsevol,

existeixen n_1 i n_2 de manera que $\forall n \begin{cases} n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2 \\ n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon/2 \end{cases}$

prenent n_0 el màxim entre n_1 i $n_2$tenim que

$$\forall n \geq n_0 \quad \begin{cases} n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2 \\ n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

El límit d'un producte és el producte dels límits.

$$\text{lím}\,(a_n \cdot b_n) = \text{lím}\, a_n \cdot \text{lím}\, b_n$$

Ja que:

Si $\text{lím}\, a_n = a$ i $\text{lím}\, b_n = b$

fixat un $\varepsilon > 0$ qualsevol,

existeixen n_1 i n_2 de manera que $\forall n \begin{cases} n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2 \\ n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon/2 \end{cases}$

Com $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ \forall x \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathbf{l}| < \varepsilon$

en particular per $\varepsilon = 1$ existeix δ i si $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - \mathbf{l}| < 1 \Rightarrow -1 < f(x) - \mathbf{l} < 1 \Rightarrow$
$\mathbf{l} - 1 < f(x) < \mathbf{l} + 1$
i per tant $f(x)$ està afitada a un entorn de x_0.

Si considerem $|f(x) \cdot g(x) - l' \cdot l''|$
sumant i restant $f(x) \cdot l''$ obtenim
$|f(x) \cdot g(x) - l' \cdot l''| = |f(x) \cdot g(x) - l' \cdot l'' + f(x) \cdot l'' - f(x) \cdot l''|$

treien factor comú
$|f(x) \cdot g(x) - l' \cdot l'' + f(x) \cdot l'' - f(x) \cdot l''| = |f(x) \cdot (g(x) - l'') + l'' \cdot (f(x) - l')| \leq$
$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - l''| + |l''| \cdot |f(x) - l'|$

Si **K** és una fita superior de f. considerem **M**= mín{**K** , $|l''|$ } llavors tenim que

Com $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l' \Rightarrow \forall \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ | \ \forall x \ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \mathbf{l'}| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Com $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'' \Rightarrow \forall \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ | \ \forall x \ |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \mathbf{l''}| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M}$

I per tant

$\forall \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta = \text{mín}\,(\delta_1, \delta_2) > 0 \ \ \forall x \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) \cdot g(x) - l' \cdot l''| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - l''| + |l''| \cdot |f(x) - l'| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Propietat

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

ja que:

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

El límit d'un quocient és el quocient dels límits.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$ sempre i quan $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

ja que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} .$$

El límit d'una potència és la potència del límit:

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)^{\alpha} \right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x) \right]^{\alpha}$$

El límit d'una exponencial és l'exponencial del límit:

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)^{g(x)} \right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x) \right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left[a^{g(x)} \right] = a^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

Entenem per progressió aritmètica a aquelles succions on cada terme s'obté del seu anterior sumant-li una constant **d** anomenada diferència.

és a dir: $\mathbf{a_n = a_{n-1} + d}$

com $a_n = a_{n-1}+d = a_{n-2}+2\cdot d = a_{n-3}+3\cdot d = ... = a_1+(n-1)\cdot d$

tenim que per trobar el terme n podem utilitzar l'expressió $\mathbf{a_n = a_1+(n-1)\cdot d}$ que anomenem terme general

per exemple la progressió aritmètica de primer terme –7 i diferència 3 té com a primers termes $a_1=-7$, $a_2=-4$, $a_3=-1$, $a_4= 2$, $a_5= 5$

si ara volem trebar el terme 6è sols hem de fer que $a_6 = -7 + (6-1)\cdot 3 = 8$.

Suma de termes equidistants dels extrems

Quan considerem els n primers termes d'una progressió aritmètica i considerem a_1 i a_n com els extrems, resulta que $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n$

És a dir:

La suma de termes equidistants dels extrems d'una progressió aritmètica és constant.

ja que:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + (1+k-1)\cdot d + a_1 + (n-k-1)\cdot d = a_1 + a_1 + (1+k-1+n-k-1)\cdot d =$$
$$= a_1 + a_1+(n-1)\cdot d= a_1 + a_n$$

Suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2}$$

ja que:

si anomenen S a aquesta suma $S = a_1 + a_2 +...+ a_{n-1} + a_n$

per la commutabilitat de la suma de reals $S = a_n + a_{n-1}+...+ a_2 + a_1$

i sumant terme a terme

$2\cdot S = a_1 + a_n + a_2 + a_{n-1} + a_3 + a_{n-2} + ...+ a_{n-2}+ a_3 + a_{n-1} + a_2 + a_n + a_1$

com la suma de termes equidistants dels extrems és igual

$2\cdot S = (a_1 + a_n)\cdot n$ i per tant

$$S = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2} .$$

Eemples:

Quantes campanades fa un rellotge cada dia, si sols toca a les hores?

El número de campanades que sonen és 1, 2, 3, ... 11,12, 1, 2, .. , 11, 12.
i està clar que segueix una progressió aritmètica de primer terme 1, de darrer terme 12 i diferència 1 que es repeteix dos cops al dia.

Per tant Núm Campanades = 2· $2\cdot(1+12)\cdot\frac{12}{2} = 13\cdot 12 = 156$.

PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Entenem per progressió **geomètrica** a aquelles succions on cada terme s'obté del seu anterior multiplicant-lo per una constant fixa **r** anomenada raó.

és a dir: $\mathbf{a_n = a_{n-1} \cdot r}$

com $a_n = a_{n-1}\cdot r = a_{n-2}\cdot r^2 = a_{n-3}\cdot r^3 = \ldots = a_1\cdot r^{n-1}$

tenem que per el terme generals d'una progressió geomètrica és $\mathbf{a_n = a_1\cdot r^{n-1}}$.

Exemple:

- 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 són els 7 termes d'uns progressió geomètrica de raó 2 i primer terme 3
- Els 10 primers termes d'una progressió geomètrica de raó 1.05 1 primer terme 100 són: 100; 105; 110,25; 115,7625; 121,550625; 127,628156; 134,009564; 140,710042; 147,745544; 155,132822.

  Observeu que si dipositem 100€ a un banc a un interès compost anual del 5%, el capital del que podem disposar al final de cada any és la progressió anterior.

Producte de termes equidistants dels extrems d'una progressió geomètrica

Si a_n és una progressió geomètrica de n termes $a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$

És a dir:

A una progressió geomètrica de n termes
el producte de termes equidistants dels extrems és constant.

ja que:

$$a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot r^{1+k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{1+k-1+n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

Producte dels n primers termes d'una progressió aritmètica.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}} .$$

Obvi a partir de la propietat anterior.

Suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} .$$

ja que:

si anomenem **S** a aquesta suma

$\mathbf{S}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = \mathbf{S}=a_1 + a_1\cdot r + a_1\cdot r^2 + \ldots + a_1\cdot r^n \Rightarrow$

$\mathbf{S}-a_1 = a_1\cdot r + a_1\cdot r^2 + \ldots + a_1\cdot r^n$ (1)

$\mathbf{S}\cdot r = a_1\cdot r + a_1\cdot r^2 + a_1\cdot r^3 + \ldots + a_1\cdot r^{n+1}$ (2)

ai ara fem (2) – (1)

$\mathbf{S}\cdot r - \mathbf{S} + a_1 = a_1\cdot r^{n+1}$

i operant $\mathbf{S}\cdot(r-1) = a_1\cdot r^{n+1} - a_1 = a_1\cdot r^n\cdot r - a_1 = a_n\cdot r - a_1 \Rightarrow S = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$.

Exemple:

- Diuen que un poderós príncep de la índia, va voler recompensar a l'inventor dels escacs; aquest li va demanar un gra de blat per la primera casella, dos per la segona, quatre per les tercera, és a dir cada casella doblés el número de grans de l'anterior. Quants grans de blat li corresponen a la darrera casella del tauler i quants grans de blat demanava?
  Com el tauler d'escacs de 8 per 8 = 64 caselles, a aquesta li correspondran $1\cdot 2^{64}$ grans és a dir prop de $9.2\cdot 10^{18}$ grans.
  I el número total de grans que demanava és de $S = \dfrac{a_{64}\cdot 2 - a_1}{2-1} \approx 1.8\cdot 10^{19}$.
  Evidentment el príncep no va poder donar la recompensa.

Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $|r|<1$.

Si a_n és una progressió geomètrica de raó r amb $|r|<1$, tenim que la suma dels infinits termes de la progressió és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \dfrac{a_1}{1-r}$.

ja que:

de la propietat anterior

$$S_n = \frac{a_n\cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1\cdot r^n\cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1\cdot r^{n+1}}{r-1} + \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1\cdot r^{n+1}}{r-1} + \frac{a_1}{1-r}$$

com quan $n \longrightarrow \infty$ el primer sumand tendeix a 0, tenim que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Exemple:

Quin és el valor de $\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3...}}}}$

Com : $\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3...}}}} = \left(3\cdot\left(3\cdot\left(3\cdot(3\cdot...)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$

per les propietats de les potències

$\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3...}}}}\ 3^{1/2}\cdot 3^{1/4}\cdot 3^{1/8}\cdot 3^{1/16}... = 3^{1/2+1/4+1/8+1/16+...}$

I com $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ..$ és la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $r = \dfrac{1}{2}$

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + .. = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

amb el que $\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3...}}}} = 3^1 = 3$.